

北京大学数学教学系列丛书

偏微分方程

周蜀林 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

偏微分方程 / 周蜀林编著. — 北京: 北京大学出版社,
2005.8

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-08529-5

I. 偏… II. 周… III. 偏微分方程 — 高等学校 — 教材 IV. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 093114 号

书 名: 偏微分方程

著作责任者: 周蜀林 编著

责任编辑: 曾琬婷

标准书号: ISBN 978-7-301-08529-5/O · 0634

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

890mm×1240mm A5 8.125 印张 230 千字

2005 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 3 次印刷

印 数: 7001—10000 册

定 价: 16.00 元

内 容 简 介

本书是为高等院校基础数学和计算数学等专业的偏微分方程课程编写的教材。

全书共分为四章, 重点论述偏微分方程中最简单的位势方程、热方程和波动方程的基本理论和基本方法. 在各章节中, 分别介绍这些方程的初值问题和混合问题的求解方法, 同时介绍关于这些问题的一些先验估计, 从而解决这些问题解的存在性、惟一性和稳定性等关键问题.

本书的基本想法是利用数学分析 (微积分) 来讲解偏微分方程. 本书在选材上贯彻少而精的原则, 充分反映了偏微分方程中的核心内容; 在内容处理上, 由浅入深, 循序渐进; 在叙述表达上, 严谨精炼, 清晰易读, 有利于教学与自学. 为了使读者理解和拓宽所学知识, 每章配置了许多富有启发性的习题. 书末附有习题答案与提示, 便于教师和学生参考.

本书可作为高等院校基础数学、计算数学、应用数学、金融数学、统计学、物理学等专业以及相关学科的本科生教材或教学参考书, 也可供在实际工作中需要利用偏微分方程基础知识的科研人员参考.

作 者 简 介

周蜀林 北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 主要研究方向是偏微分方程及其应用. 对偏微分方程领域的方法应用熟练, 在退化椭圆和抛物型方程 (方程组), 完全非线性椭圆和抛物型方程方面已取得一些突出的研究成果.

序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效. 2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时. 并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合,我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面

前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新. 我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习. 让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张 继 平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前 言

本书力求利用尽可能少的大学本科的数学知识来阐述偏微分方程的基本理论和基本方法. 本书的基本点在于利用数学分析(微积分)来讲解偏微分方程. 读者只需要具备多元微积分的一些基础知识就能读懂本书的全部内容. 读完本书后, 读者可以对偏微分方程最基本的内容有一定的了解.

本书主要介绍偏微分方程中最简单的三个方程: 位势方程、热方程和波动方程. 在各章节中, 分别介绍这些方程初值问题和混合问题的求解方法, 同时介绍关于这些问题解的一些先验估计. 这样, 也就解决了这些问题解的存在性、惟一性和稳定性问题.

本书共分四章进行编写. 第一章先介绍偏微分方程的术语和一些准备知识. 第二章主要介绍位势方程的基本理论. 由于调和函数在现代分析中占有重要的地位, 该章重点介绍 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) 上的调和函数及其性质. 与此同时, 该章还介绍位势方程的基本解和如何使用基本解来构造位势方程边值问题 Green 函数, 进而得到位势方程边值问题解的表达式. 然后再介绍位势方程最重要的先验估计——极值原理和最大模估计. 第三章主要介绍热方程的基本理论. 该章先重点介绍 Fourier 变换方法和分离变量法, 利用 Fourier 变换方法求出热方程初值问题解的表达式, 并由此导出热方程的基本解; 利用分离变量法来解出一维波动方程的混合问题解的表达式, 由此导出热方程相应问题的 Green 函数. 然后介绍关于热方程混合问题和初值问题的各种极值原理和最大模估计. 第四章主要介绍波动方程的基本理论. 首先介绍特征线法、球平均法和降维法, 利用这些方法求解出一维、二维和三维波动方程初值问题解的表达式. 同时, 将介绍波动方程最重要的概念——特征线(特征锥), 推导波动方程最基本的先验估计——能量不等式. 然后利用分离变量法来求解出一维波动方程混合问题的解的表达式, 进而推导波动方程混合问题的能量不等式.

本书每一章收集了一些很有趣和富有启发性的习题. 这些习题可以帮助读者理解偏微分方程的基础理论, 牢固掌握偏微分方程的基本方法, 同时也可以作为已知的结果应用在偏微分方程的实际问题的研究中.

作者曾以本书作为北京大学数学科学学院本科生的基础课程偏微分方程的教材, 给北京大学数学科学学院 98 级, 99 级, 00 级和 02 级讲授过. 原教材《数学物理方程讲义》(姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐编) 是一本水平很高的书, 深受国内偏微分方程同行的喜爱. 与原教材相比, 本书需要更少的学时和更少的准备知识, 同时也增添了一些更现代化的内容. 作者重写此教材的目的是希望偏微分方程变得通俗易懂, 满足更多层次的读者的需要, 让更多的读者了解偏微分方程最基本的理论和方法.

在撰写本书过程中, 作者得到了北京大学数学科学学院《北京大学数学教学系列丛书》编委会和北京大学出版社的正确指导和大力支持, 也得到了本院数学系陈亚浙、吴兰成、刘西垣、刘嘉荃、王耀东、黄少云、应隆安、林源渠、郭懋正和谭小江各位教授的热情鼓励和鼎力相助, 作者在此衷心地感谢他们慷慨的帮助. 在本书的出版过程中, 责任编辑曾琬婷女士和出版社的刘勇老师倾注了很多心血, 做了大量辛勤的工作, 作者对他们表示衷心的感谢. 与此同时, 作者还要特别感谢北京大学数学科学学院 98 级, 99 级, 00 级和 02 级的同学们, 尤其是邢浩、王晓宇和黄晶等同学, 他们在学习偏微分方程这门课程时, 逐字逐句地阅读了本书的全部内容, 认真解答了本书的绝大部分习题, 给作者指出了原稿中的许多错误和提出了许多修改意见. 还要感谢首都经贸大学的李峰教授, 他在北京大学访问期间, 也帮助作者改正了原稿中的许多错误. 另外, 赵斌和周帆同学为作者提供了他们的作业, 姚锋平博士、孙玉同学帮助作者准备部分习题的提示和答案的 TeX 版本, 张克竞同学验证了习题和答案. 在此向他们表示衷心的感谢!

周蜀林

2008 年 6 月稍有修改于燕园

目 录

第一章 引言	(1)
§1.1 偏微分方程的基本概念	(1)
§1.2 实例	(5)
§1.3 适定性问题	(11)
§1.4 习题	(15)
第二章 位势方程	(17)
§2.1 调和函数	(21)
2.1.1 实例	(22)
2.1.2 平均值公式	(23)
§2.2 基本解和 Green 函数	(36)
2.2.1 基本解	(37)
2.2.2 Green 函数	(44)
§2.3 极值原理和最大模估计	(57)
2.3.1 极值原理	(57)
2.3.2 最大模估计	(62)
§2.4 能量模估计	(66)
§2.5 习题	(68)
第三章 热方程	(80)
§3.1 初值问题	(83)
3.1.1 Fourier 变换和 Fourier 积分	(83)
3.1.2 初值问题和基本解	(95)
§3.2 混合问题和 Green 函数	(101)
§3.3 极值原理和最大模估计	(117)
3.3.1 极值原理	(117)
3.3.2 第一边值问题的最大模估计	(120)
3.3.3 第二、第三边值问题的最大模估计	(121)

3.3.4 初值问题的最大模估计	(124)
3.3.5 混合问题的能量模估计	(129)
* 3.3.6 反向问题的不适定性	(134)
§3.4 习题	(135)
第四章 波动方程	(146)
§4.1 初值问题	(149)
4.1.1 问题的简化	(149)
4.1.2 一维初值问题	(153)
4.1.3 一维半无界问题	(157)
4.1.4 多维初值问题	(162)
4.1.5 特征锥	(167)
4.1.6 能量不等式	(172)
§4.2 混合问题	(178)
4.2.1 分离变量法	(179)
4.2.2 驻波法与共振	(187)
4.2.3 能量不等式	(190)
* 4.2.4 广义解	(194)
§4.3 习题	(203)
习题答案与提示	(217)
名词索引	(242)
符号索引	(246)
参考文献	(249)

第一章 引言

§ 1.1 偏微分方程的基本概念

在数学分析的课程中, 我们已经学习过一元函数的导数和多元函数的偏导数的概念, 并了解许多与导数和偏导数有关的定理、结论. 在本书中我们将研究一些非常简单而具有很强实际背景的偏微分方程.

什么是偏微分方程呢? 粗略地说, 与导数有关的方程我们称之为常微分方程, 而与偏导数有关的方程我们称之为偏微分方程. 更精确地, 我们给出如下定义.

定义 1.1 一个偏微分方程是与一个未知的多元函数及它的偏导数有关的方程; 一个偏微分方程组是与多个未知的多元函数及它们的偏导数有关的方程组.

下面我们介绍关于偏微分方程的一些术语和基本概念.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 Ω 上的点. 假设 $u = u(x) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个函数. 对固定正整数 k , 我们用符号 $D^k u$ 表示 u 的所有 k 阶偏导数

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}},$$

其中 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中 k 个元素的任意排列. 因此, 我们可以把 $D^k u$ 看成是 n^k 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{n^k}$ 上的向量, 并记它的长度为

$$|D^k u| = \left(\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

特别地, 当 $k = 1$ 时, 我们称 n 维向量

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

为 u 的**梯度**; 当 $k = 2$ 时, 我们称 $n \times n$ 矩阵

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

为 u 的**Hessian 矩阵**. 通常记符号 Δ 为 Laplace 算子,

$$\Delta u = \operatorname{tr}(D^2 u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

也就是 u 的 Hessian 矩阵的迹, 即 u 的 Hessian 矩阵的对角线元素之和.

设 $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个向量函数, 记 F 的散度为

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

于是 Δu 是 u 的梯度的散度, 即

$$\Delta u = \operatorname{div}(Du).$$

为简单起见, 我们通常也使用如下符号

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

下面我们定义偏微分方程的阶.

定义 1.2 如下形式的方程

$$F[D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x] = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

称为一个 k 阶偏微分方程, 其中

$$F: \mathbf{R}^{n^k} \times \mathbf{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

是一个给定函数, $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个未知函数. 一个偏微分方程的阶就是此偏微分方程中出现的未知函数的偏导数的最高次数.

我们将满足方程 (1.1) 的所有函数称为方程 (1.1) 的解. 如果方程 (1.1) 的解是实解析的或无穷次可微的, 那将是最理想的事. 然而在大多数情况下这不可能成立. 也许对 k 阶偏微分方程 (1.1) 来说, 希望它的解 k 次连续可微更现实. 这样, 在方程 (1.1) 中出现的函数 $u(x)$ 的所有偏导数都连续, 于是方程 (1.1) 在 Ω 上有意义.

我们用 $C(\Omega)$ 表示在 Ω 上的连续函数构成的线性空间. 对于它的元素 $u \in C(\Omega)$, 其模定义为

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

我们用 $C^k(\Omega)$ 表示 Ω 上所有 k 阶偏导数都存在和连续的函数构成的线性空间, 也就是在 Ω 上 k 次连续可微的函数构成的线性空间. 对于它的元素 $u \in C^k(\Omega)$, 其模定义为

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sum_{|\alpha|=1}^k \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 表示多重指标,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

对于函数 $u \in C(\Omega)$, 定义 u 的支集为所有满足 $u(x) \neq 0$ 的点集在 Ω 上的闭包, 记为

$$\text{spt } u = \overline{\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}}.$$

我们用 $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中具有紧支集的函数类. 同时我们用 $C^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 上任意阶偏导数都存在和连续的函数类, 即

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

定义 1.3 如果 $u \in C^k(\Omega)$ 满足方程 (1.1), 则我们称它是方程 (1.1) 的古典解.

在本书中, 如果没有特别的说明, 我们所讨论的解都是古典解. 当然我们也将本书第四章的最后一节介绍一下广义解的概念. 现在, 在偏微分方程及其相关领域, 方程或方程组解的概念很丰富. 对于不同的方程或方程组, 人们提出不同的解的概念, 例如, 广义解、弱解、粘性解、熵解、重规范化解, 等等.

方程 (1.1) 是形式最一般的偏微分方程, 在这里我们列出一些形式较简单的偏微分方程和偏微分方程组, 并介绍一些在偏微分方程中广泛使用的术语.

定义 1.4 (1) 如果方程 (1.1) 可表示成

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x),$$

其中 a_α ($|\alpha| \leq k$) 和 f 是给定的函数, 则称方程 (1.1) 为线性偏微分方程;

(2) 如果方程 (1.1) 可表示成

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f[D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x],$$

其中 a_α ($|\alpha| = k$) 和 f 是给定函数, 则称方程 (1.1) 为半线性偏微分方程;

(3) 如果方程 (1.1) 可表示成

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha[D^{k-1}u(x), \cdots, Du(x), u(x), x] D^\alpha u$$

$$= f[D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x],$$

其中 a_α ($|\alpha| = k$) 和 f 是给定函数, 则称方程 (1.1) 为**拟线性偏微分方程**;

(4) 如果方程 (1.1) 非线性地依赖于 $u(x)$ 的最高阶偏导数 $D^k u$, 则称方程 (1.1) 为**完全非线性偏微分方程**.

§1.2 实例

首先, 我们介绍一些著名的偏微分方程.

较著名的一些线性偏微分方程有:

(1) Laplace 方程

$$\Delta u = 0;$$

(2) 特征值方程

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (\lambda \text{ 为常数});$$

(3) 热方程

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \quad (a > 0 \text{ 为常数});$$

(4) Schrödinger 方程

$$u_t - i\Delta u = 0;$$

(5) Kolmogorov 方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = 0,$$

其中 a_{ij}, b_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 为常数;

(6) Fokker-Planck 方程

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u)_{x_i} = 0,$$

其中 a_{ij}, b_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 为常数;

(7) 输运方程

$$u_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = 0,$$

其中 b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为常数;

(8) 波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \quad (a > 0 \text{ 为常数});$$

(9) 电报方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u + bu_t = 0,$$

其中 a 为正常数, b 为常数;

(10) 横梁方程

$$u_t + u_{xxxx} = 0.$$

较著名的一些非线性偏微分方程有:

(1) 非线性 Poisson 方程

$$\Delta u = u^3 - u;$$

(2) 极小曲面方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{(1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0;$$

(3) Monge-Ampère 方程

$$\det(D^2 u) = f(x);$$

(4) Hamilton-Jacobi 方程

$$u_t + H(Du) = 0,$$

其中 $H: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为已知函数;

(5) Burgers 方程

$$u_t + uu_x = 0;$$

(6) 守恒律方程

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{F}(u) = 0;$$

(7) 多孔介质方程

$$u_t - \Delta u^\gamma = 0 \quad (\gamma > 1 \text{ 为常数});$$

(8) Korteweg-deVries (KdV) 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0;$$

(9) p -Laplace 方程

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0 \quad (p > 1 \text{ 为常数});$$

(10) 非线性波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(u) \quad (a > 0 \text{ 为常数});$$

(11) Boltzmann 方程

$$f_t + \mathbf{v} \cdot D_x f = Q(f, f),$$

其中 $f = f(x, \mathbf{v}, t)$, $Q(f, f) = Q(f(x, \mathbf{v}, t), f(x, \mathbf{v}, t))$ 为碰撞项, 这里

$$Q(\varphi, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} d\mathbf{v}_* \int_{S^{n-1}} d\omega [\varphi(\mathbf{v}')\varphi(\mathbf{v}'_*) - \varphi(\mathbf{v})\varphi(\mathbf{v}_*)] B(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*, \omega),$$

S^{n-1} 为 $n-1$ 维单位球面, $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_*$ 由等式 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \omega]\omega$ 及 $\mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \omega]\omega$ 给定, B 为碰撞核, $D_x f$ 表示 f 对 x 的偏导数.

下面我们再介绍一些著名的偏微分方程组.

较著名的一些线性偏微分方程组有:

(1) 线性弹性平衡方程组

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) D(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\mu, \lambda > 0 \text{ 为常数});$$

(2) 线性弹性发展方程组

$$\mathbf{u}_{tt} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) D(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\mu, \lambda \text{ 为常数});$$

(3) Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathbf{B}, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

这里 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 分别为电场强度和磁场强度, c 为光速.

较著名的一些非线性偏微分方程组有:

(1) 守恒律方程组

$$\mathbf{u}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_x = \mathbf{0};$$

(2) 反应扩散方程组

$$\mathbf{u}_t - a^2 \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (a > 0 \text{ 为常数});$$

(3) Euler 方程组 (不可压无粘性流)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot D\mathbf{u} = -Dp, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

这里 $\mathbf{u}, p$ 分别为流体的速度和压力;

(4) Navier-Stokes 方程组 (不可压粘性流)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot D\mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = -Dp, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

其中 μ 为粘性系数, $\mathbf{u}, p$ 分别为流体的速度和压力.

本书将主要讨论三个典型的二阶线性偏微分方程, 这三个方程是最简单而又最重要的二阶线性偏微分方程, 它们是:

(1) 位势方程

$$-\Delta u = f(x); \quad (1.2)$$

(2) 热方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t) \quad (a > 0 \text{ 为常数}); \quad (1.3)$$

(3) 波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t) \quad (a > 0 \text{ 为常数}), \quad (1.4)$$

其中 $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子.

在 $\mathbf{R}^m$ 中, 二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) u_{x_i} + c(x) u(x) = f(x), \quad (1.5)$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, m$). 方程 (1.2), (1.3) 和 (1.4) 是它的特例. 以 A 表示矩阵 $(a_{ij})_{m \times m}$, 对于位势方程 (1.2), 取 $m = n$, 则

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

且 $b_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $c(x) \equiv 0$; 对于热方程 (1.3), 取 $m = n + 1$, $t = x_{n+1}$, 则

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & -a^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

且 $b_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $b_{n+1}(x) \equiv 1$, $c(x) \equiv 0$; 对于波动方程 (1.4), 取 $m = n + 1$, $t = x_{n+1}$, 则

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & -a^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $b_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n + 1$), $c(x) \equiv 0$.

从矩阵 A 的特征值来考察方程 (1.2), (1.3) 和 (1.4), 我们发现它们的差别在于: 对于位势方程 (1.2), 系数矩阵 A 的全部特征值都是负的, 即 A 是负定的; 对于热方程 (1.3), 系数矩阵 A 的全部特征值除了一个为 0 外, 其他都是负的, 即 A 是非正定的; 对于波动方程 (1.4), 系数矩阵 A 的全部特征值除了一个为正外, 其他都是负的, 即 A 是不定的.

设 $x_0 \in \mathbf{R}^m$, $A(x_0)$ 表示系数矩阵 A 在点 x_0 的值. 由于系数矩阵 $A(x_0)$ 是对称矩阵, 从线性代数的结论我们知道它总是可以对角化. 基于此, 我们对于一般二阶线性偏微分方程进行分类.

定义 1.5 若矩阵 $A(x_0)$ 的 m 个特征值都是负数, 则称方程 (1.5) 在点 x_0 属于**椭圆型**; 若矩阵 $A(x_0)$ 的 m 个特征值除了一个特征值为 0 外, 其他 $m - 1$ 个特征值都是负数, 则称方程 (1.5) 在点 x_0 属于**抛物型**; 若矩阵 $A(x_0)$ 的 m 个特征值除了一个特征值为正数外, 其他 $m - 1$ 个特征值都是负数, 则称方程 (1.5) 在点 x_0 属于**双曲型**. 若对于区域 Ω 上的每一个点, 方程 (1.5) 属于椭圆型, 则称方程 (1.5) 在 Ω 上是**椭圆型**的; 若对于区域 Ω 上的每一个点, 方程 (1.5) 属于抛物型, 则称方程 (1.5) 在 Ω 上是**抛物型**的; 若对于区域 Ω 上的每一个点, 方程 (1.5) 属于双曲型, 则称方程 (1.5) 在 Ω 上是**双曲型**的.

当然, 从矩阵 $A(x_0)$ 的性质分析还有其他的情形. 由于这些方程的实际背景至今仍不清楚, 远没有像上述三类方程引起人们的广泛兴趣. 由上面的分类我们知道位势方程 (1.2) 是椭圆型方程, 热方程 (1.3) 是抛物型方程, 波动方程 (1.4) 是双曲型方程. 方程 (1.2), (1.3) 和 (1.4) 分别称为椭圆型、抛物型和双曲型方程的标准型.

定理 1.1 若方程 (1.5) 的二阶项的系数矩阵 A 是常数矩阵, 且它属于椭圆型 (或抛物型, 双曲型) 方程, 则存在一个非奇异的自变量替换把方程 (1.5) 的二阶项化为形如方程 (1.2) (或 (1.3), (1.4)) 的**标准型**.

证明 我们只证明方程 (1.5) 是椭圆型的情形, 其他情形类似. 将方程 (1.5) 写成

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} u_{x_i x_j} = f(x, u, D_x u),$$

其中 $D_x u$ 表示 u 关于 x 的所有一阶偏导数. 由于方程 (1.5) 属于椭圆型, 因而一定存在一个非奇异矩阵 $B = (b_{kl})_{m \times m}$, 使得系数矩阵 A 可以对角化, 且 $BAB^T = -I$ (单位阵), 即

$$\sum_{i,j=1}^m b_{ki} a_{ij} b_{lj} = -\delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, m,$$

其中 δ_{kl} 是 Kronecker 符号. 由于矩阵 B 非奇异, 作自变量替换

$$y_k = \sum_{i=1}^m b_{ki} x_i, \quad k = 1, \dots, m,$$

将方程 (1.5) 的二阶项化为

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} u_{x_i x_j} &= \sum_{i,j,k,l=1}^m a_{ij} b_{ki} b_{lj} u_{y_k y_l} \\ &= - \sum_{k,l=1}^m \delta_{kl} u_{y_k y_l} \\ &= -\Delta_y u, \end{aligned}$$

从而方程 (1.5) 对于新变量 $y_1, \dots, y_m$ 具有如下形式:

$$-\Delta_y u = \tilde{f}(y, u, D_y u),$$

这里 $D_y u$ 表示 u 关于 y 的所有一阶偏导数. 定理至此获证.

§ 1.3 适定性问题

对于一个偏微分方程来说, 通常我们还需要提一些定解条件, 即初边值条件. 我们把一个偏微分方程和相应的定解条件组成的问题称为**定解问题**. 对此, 我们将在讲述具体方程时再做详细的阐述.

对于一个偏微分方程的定解问题, 我们总是希望求出它的解, 而且希望求出来的解是合理的, 符合实际的. 为了达到此目标, 首先我们希望定解问题有解, 其次我们希望定解问题的解是惟一的. 另外, 我们期望定解问题的解连续地依赖定解条件和定解问题中的已知函数. 为此, 我们引入下面的一些术语.

定义 1.6 如果一个偏微分方程定解问题满足下列条件:

- (1) 它的解存在;
- (2) 它的解惟一;
- (3) 它的解连续地依赖定解条件和定解问题中的已知函数,

则称这个定解问题是**适定**的; 否则称这个定解问题是**不适定**的.

定义 1.6 中的第一个条件是解的存在性问题, 第二个条件是解的惟一性问题, 而第三个条件是解的稳定性问题. 这些条件在实际问题中都极为重要. 值得说明的是, 第三个条件在许多具体问题中是非常必要的. 实际上, 从数学模型中推导出的偏微分方程定解问题总是实际问题的近似. 同时由于测量的误差, 我们不可能获得绝对精确的初始数据和边值数据, 因而我们定解问题的解与实际问题中的解必定有差异, 我们只能希望当测量的误差越来越小时, 定解问题的解与实际问题的解越来越接近. 我们将在讨论具体方程的定解问题时更进一步阐述定义 1.6 中三个条件的意义.

在本书后面的章节中, 当求解位势方程、热方程和波动方程的定解问题时, 我们总是先假设定解问题的解具有非常好的性质 (如光滑性), 接着我们求出定解问题的解的表达式. 这样的解我们称为定解问题的**形式解**. 然后我们再严格证明在定解条件满足一定的要求时, 所得到的形式解的确是定解问题的古典解, 从而获得解的存在性. 在研究位势方程、热方程和波动方程的定解问题的解的惟一性和稳定性时, 我们先导出一些关于解的**先验估计**, 然后再利用这些估计推导出定解问题的解的惟一性和稳定性. 这样, 我们就基本上回答了关于位势方程、热方程和波动方程的一些定解问题的适定性问题.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合, 我们用 $\bar{\Omega}$ 表示它的闭包, $\partial\Omega$ 表

示它的边界. 同时, 我们用 $\mathbf{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_n > 0\}$ 表示 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的上半空间. 由于上半空间 $\mathbf{R}_+^n$ 的边界 $\partial\mathbf{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_n = 0\}$ 是 $n-1$ 维欧氏空间, 我们也记 $\partial\mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1}$. 当 $n=1$ 时, 我们将 $\mathbf{R}_+^1$ 简记为 $\mathbf{R}_+$, 因而 $\mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$. 我们用 $B(x, r)$ 表示 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中以 x 为中心, 以 r 为半径的开球, 其体积为

$$\alpha(n)r^n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}r^n,$$

其中 $\alpha(n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上单位球的体积, 函数 $\Gamma: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ 定义为

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0.$$

我们用 $S^{n-1}(x, r) = \partial B(x, r)$ 表示球 $B(x, r)$ 的边界, 即 $n-1$ 维球面, 其面积为

$$\omega(n)r^{n-1} = n\alpha(n)r^{n-1}.$$

下面我们回顾一下多元微积分中的 Green 公式和 Gauss 公式. 首先我们叙述 Green 公式.

定理 1.2 (Green 公式) 假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是平面上由有限条可求长闭曲线围成的闭区域, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy,$$

其中 ∂D 取正向.

推论 1.3 假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是平面上由有限条可求长闭曲线围成的闭区域, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] dS, \quad (1.6)$$

其中 $\mathbf{n}$ 为单位外法向量.

证明 设 $\mathbf{t}$ 为边界 ∂D 的单位切向量. 由于 $\mathbf{n}$ 取外法线方向, 因而

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \cos(\mathbf{t}, y), \quad \cos(\mathbf{n}, y) = -\cos(\mathbf{t}, x).$$

由 Green 公式得

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\partial D} -Q dx + P dy \\ &= \int_{\partial D} [-Q \cos(\mathbf{t}, x) + P \cos(\mathbf{t}, y)] dS \\ &= \int_{\partial D} [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] dS, \end{aligned}$$

因而完成定理的证明.

记 $\mathbf{F} = (P, Q)$, 由于 $\mathbf{n} = (\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y))$, 则 Green 公式 (1.6) 为

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.7)$$

下面我们叙述 Gauss 公式.

定理 1.4 假设 $V \subset \mathbf{R}^3$ 是空间上的一个有界闭区域, 其边界 ∂V 由有限张分块光滑的双侧曲面组成, 并取外法向, 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 V 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_{\partial V} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\partial V} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为边界 ∂V 的外法线方向的方向余弦.

记 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 由于 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则 Green 公式 (1.8) 为

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.9)$$

实际上, 我们可以证明下面更一般的 Gauss-Green 公式.

定理 1.5 (Gauss-Green 公式) 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界开集, 且 $\partial\Omega \in C^1$. 如果 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 属于 $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS(x),$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

§1.4 习 题

1. 假设 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是无穷次可微函数, 证明:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha + O(|x|^{k+1}),$$

其中 k 可为任何正整数且 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 表示多重指标, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

2. 求二阶常微分方程 $y'' = y^3 - y$ 的一个特解.

3. 证明 Leibniz 公式

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v,$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 表示多重指标,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!},$$

且 $\beta \leq \alpha$ 表示 $\beta_i \leq \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

4. 利用 Gauss-Green 公式证明:

(1) 如果 $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS(x),$$

其中 n_i 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量 $\mathbf{n}$ 的第 i 个分量;

(2) 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS(x);$$

(3) 如果 $u \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, dS(x);$$

(4) 如果 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS(x).$$

5. 讨论二阶偏微分方程

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x, y, u_x, u_y)$$

的分类, 其中 $u = u(x, y)$; A, B, C 是参数.

6. 将下列方程化为标准型:

$$(1) u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0;$$

$$(2) u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0;$$

$$(3) u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

7. 将下列方程化为标准型:

$$(1) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{x_i x_j} = 0;$$

$$(2) \sum_{1 \leq j < i \leq n} u_{x_i x_j} = 0.$$

第二章 位势方程

本章讨论位势方程 (Poisson 方程)

$$-\Delta u = f(x), \quad (2.1)$$

其中 $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f(x)$ 是一个已知函数. 当非齐次项 $f \equiv 0$ 时, Poisson 方程 (2.1) 简化为 Laplace 方程

$$\Delta u = 0. \quad (2.2)$$

我们将在此章第一节中介绍 Laplace 方程 (2.2) 的解——调和函数, 推导出调和函数的平均值公式, 并利用平均值公式来得到调和函数的一些重要性质, 如强极值原理, Harnack 不等式, Liouville 定理, 调和函数的解析性等. 调和函数是偏微分方程中一类极为重要的函数, 在偏微分方程中占有极为重要的地位, 在当今的偏微分方程的研究中仍然发挥着巨大的作用. 在第二节中我们先介绍位势方程的基本解和 Green 函数, 然后构造出一些特殊区域上位势方程的第一边值问题的解的表达式, 特别是上半空间和球上位势方程 Dirichlet 问题的解的 Poisson 公式, 从而解决在这些特殊区域上位势方程边值问题的解的存在性问题. 在第三节中我们推导关于位势方程的极值原理和最大模估计, 从而得到位势方程边值问题的解的惟一性和稳定性. 最后在第四节中我们粗略介绍一下位势方程的能量模估计.

最大模估计和能量模估计是研究位势方程边值问题的两种重要的先验估计. 最大模估计是关于位势方程边值问题的解在区域每一个点上的估计, 而能量模估计是关于位势方程边值问题的解或解的梯度在整个区域上的积分估计. 从其中的任何一个估计我们都能得到位势方程边值问题的解的惟一性, 不过我们要特别指出的是最大模估计通常要比能量模估计要强很多. 但是, 当我们在更大的函数空

间类 (例如 Sobolev 空间) 考虑位势方程边值问题的解的存在性时, 能量模估计又比最大模估计要优越和自然.

Laplace 方程是偏微分方程中最重要的方程, 它可从多种模型中导出. 我们首先从一类变分问题——极小曲面问题简略地推导一下.

极小曲面问题通常可以表述为: 对于平面区域 Ω , 在边界 $\partial\Omega$ 上给定一条空间曲线 L , 求一张定义在区域 Ω 上的曲面 S , 使得 S 是所有以 L 为边界的曲面中面积最小的曲面. 换句话说, 在给定函数集合 $M_g = \{v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = g\}$ 中, 求 $u \in M_g$, 使得

$$J(u) = \min_{v \in M_g} J(v),$$

其中

$$J(v) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + |Dv|^2} dx dy.$$

当只考虑很小的形变时, 即梯度 Dv 很小时,

$$\sqrt{1 + |Dv|^2} \approx 1 + \frac{1}{2}|Dv|^2.$$

因此上述极小曲面问题近似为: 求 $u \in M_g$, 使得

$$F(u) = \min_{v \in M_g} F(v), \quad (2.3)$$

其中

$$F(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |Dv|^2 dx dy.$$

现在我们来推导函数 $u \in M_g$ 满足的必要条件. 对于任意 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, 显然 $u + \varepsilon\varphi \in M_g$. 记 $f(\varepsilon) = F(u + \varepsilon\varphi)$, 则 $f(\varepsilon)$ 是关于 ε 的二次多项式. 由定义知, 对于 $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $f(\varepsilon) \geq f(0)$. 从而有 $f'(0) = 0$, 即

$$\iint_{\Omega} Du \cdot D\varphi dx dy = 0.$$

如果 $u \in C^2(\Omega)$, 由 Green 公式得到

$$\iint_{\Omega} (-\Delta u) \varphi \, dx dy = 0.$$

由 φ 的任意性我们得到

$$-\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega,$$

且 $u|_{\partial\Omega} = g$. 通常上述方程称为变分问题 (2.3) 的 Euler-Langrange 方程.

Laplace 方程也可以从许多具有物理意义的数学模型中得到. 通常让 u 表示在平衡态下某一物理量在区域 Ω 内的密度分布 (如温度、浓度、静电位势等), 令 V 为 Ω 内的任何光滑区域, $\mathbf{F}$ 表示 u 的流速. 由于 u 处于平衡态, 那么通过 V 的边界流入和流出 V 的总流量相等, 于是我们有

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 利用 Gauss-Green 公式我们得到

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

由于区域 V 的任意性, 我们有

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0.$$

我们在这里假设 $\mathbf{F}$ 正比于 u 的梯度 Du , 在许多情况下这是非常合理的. 又因为流量总是从高密度处流向低密度处, 因此 $\mathbf{F}$ 与梯度 Du 的方向相反. 于是

$$\mathbf{F} = -aDu, \quad (2.4)$$

其中 $a > 0$ 是一正常数. 把等式 (2.4) 代入上述方程我们得到 Laplace 方程 (2.2).

附注 2.1 如果 u 分别表示温度、浓度和静电位势, 则等式 (2.4)

分别就是 Fourier 热传导定律, Fick 扩散定律, Ohm 传导定律.

另外, 我们还可以从下列概率统计模型中推导出 Laplace 方程:

设有一个由围墙包围的巨型体育场, 四周都有门以供出入. 现在有一人站在体育场中, 他通过掷硬币的方式来决定他行走的方向. 他掷两次硬币, 如果两次国徽都朝上, 他就向正北方向迈一步; 如果第一次国徽朝上而第二次麦穗朝上, 他就向正东方向迈一步; 如果两次麦穗都朝上, 他就向正南方向迈一步; 如果第一次麦穗朝上而第二次国徽朝上, 他就向正西方向迈一步. 试问在碰到围墙之前, 他通过门走出体育场的概率.

我们先取一平面坐标系, 使得体育场中心位置为原点, 并不妨设体育场所在区域为 Ω . 令 D 表示所有的门, 则 $\partial\Omega \setminus D$ 表示围墙. 以正东方向为 x 轴, 正北方向为 y 轴. 设此人每一步的步长为 h ; 掷硬币时, 国徽朝上和麦穗朝上出现的概率相等; 此人站在的位置为点 (x, y) , 在碰到围墙之前, 他通过门走出体育场的概率为 $P(x, y)$. 由于向四个方向行走的概率相等, 于是

$$P(x, y) = \frac{1}{4} [P(x, y+h) + P(x+h, y) + P(x, y-h) + P(x-h, y)],$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{P(x+h, y) + P(x-h, y) - 2P(x, y)}{h^2} \\ & + \frac{P(x, y+h) + P(x, y-h) - 2P(x, y)}{h^2} = 0. \end{aligned}$$

设 $P \in C^2(\Omega)$. 由于 h 比 Ω 小得多, 我们可以令 $h \rightarrow 0$, 利用 Taylor 展开式容易得到

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

记 χ_D 为 D 上的特征函数, 即在门 D 上为 1, 在墙 $\partial\Omega \setminus D$ 上为 0. 于是上述问题转化为求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta P = 0, & x \in \Omega, \\ P = \chi_D, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

为了求解 Poisson 方程 (2.1), 通常还要提适当的边值条件. 对于 Poisson 方程 (2.1) 来说, 这样的边值条件通常分为以下三类:

(1) **第一边值条件** 已知函数 u 在区域边界 $\partial\Omega$ 上的值, 即

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

这一类边值条件亦称为 Dirichlet 边值条件, 相应的边值问题也称为 **第一边值问题** 或 Dirichlet 边值问题.

(2) **第二边值条件** 已知函数 u 在区域边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 这一类边值条件亦称为 Neumann 边值条件, 相应的边值问题也称为 **第二边值问题** 或 Neumann 边值问题.

(3) **第三边值条件** 已知函数 u 和其在区域边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数的一个线性组合, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\alpha(x) > 0$. 相应的边值问题也称为 **第三边值问题**.

由于 Poisson 方程可以看成热方程的极限形式, 上述三类边值条件的物理意义我们将在第三章的引言部分加以阐述.

§ 2.1 调和函数

在这节中, 我们将构造一些具体的调和函数, 然后推导调和函数的平均值公式, 最后利用平均值公式来得到关于调和函数的各阶

偏导数的估计和调和函数的强极值原理, Harnack 不等式, Liouville 定理, 最后证明调和函数一定是解析函数.

2.1.1 实例

定义 2.1 如果函数 $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 具有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程 (2.2), 我们称之为 **调和函数**; 如果一个多项式满足 Laplace 方程 (2.2), 我们称之为 **调和多项式**.

首先我们注意到如下简单的事实: $1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_i^2 - x_j^2$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 和 $(3x_i^2 - x_j^2)x_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$) 是 Laplace 方程 (2.2) 的解. 特别地, 线性函数是它的解. 实际上, 我们能通过复分析中的 Cauchy-Riemann 方程来构造出许多更高次的调和多项式. 具体来说, 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是开集, 我们可以把它看成是复平面 $\mathbf{C}$ 的开区域. 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ 是一个解析函数且记函数 $f(x+iy)$ 的实部和虚部分别为 $u(x, y) = \Re f(x+iy)$, $v(x, y) = \Im f(x+iy)$. 由 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

我们知道 $u(x, y), v(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

因此 $u(x, y), v(x, y)$ 是调和函数. 对任意非负整数 $k \geq 0$, 记 $z^k = (x+iy)^k = P_k(x, y) + iQ_k(x, y)$. 由上面的讨论, 我们知道 $P_k(x, y)$ 和 $Q_k(x, y)$ 是 k 次调和多项式. 由于 $z^{k+1} = z^k \cdot z$, 易证 $P_{k+1}(x, y) = xP_k(x, y) - yQ_k(x, y)$ 和 $Q_{k+1}(x, y) = xQ_k(x, y) + yP_k(x, y)$ 是 $k+1$ 次调和多项式. 由此递推关系不难构造出一些任意次的调和多项式. 关于调和多项式更完整的阐述, 请参阅参考文献 [1] 的第五章.

又注意到 $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$, 于是我们知道 $e^x \cos y$ 和 $e^x \sin y$ 是调和函数. 因此, 我们可利用复平面上的解析函数来构造更复杂的调和函数.

另外, 我们注意到如下有趣的事实.

定理 2.1 假设 $u(x)$ 是一个 $\mathbf{R}^n$ 上的调和函数, 则

- (1) $u(\lambda x)$ 是一个调和函数, 其中 λ 是任一实数;
- (2) $u(x+x_0)$ 是一个调和函数, 其中 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 固定;
- (3) $u(Ox)$ 是一个调和函数, 其中 $O: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个正交变换.

证明留作练习.

此定理说明在伸缩变换、平移变换和正交变换下调和函数仍变为调和函数.

2.1.2 平均值公式

现在设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个开集, 且 u 是 Ω 上的一个调和函数. 我们将推导一个极为重要的平均值公式, 它说明函数 u 在点 $x \in \Omega$ 上的取值 $u(x)$ 等于 u 在球面 $\partial B(x, r)$ 上的平均值, 也等于它在球 $B(x, r)$ 上的平均值. 由此公式我们可推导出关于调和函数的许多重要结论.

定理 2.2 (平均值公式) 假设 $u \in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数, 则对于任意的球 $B(x, r) \subset \Omega$, 有

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \int_{B(x, r)} u(y) dy, \quad (2.5)$$

其中积分符号 $\int$ 表示求平均值, 即

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y), \\ \int_{B(x, r)} u(y) dy &= \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x, r)} u(y) dy, \end{aligned}$$

这里 $\alpha(n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上单位球的体积.

证明 (1) 令

$$\phi(r) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y).$$

作平移和伸缩变换, 则

$$\phi(r) = \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

对 r 求微商, 由 Gauss-Green 公式我们得到

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(0, 1)} Du(x + rz) \cdot z dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x, r)} Du(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy = 0, \end{aligned}$$

于是 $\phi(r)$ 是一个常数. 由 $u(x)$ 的连续性, 从而

$$u(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = \phi(r),$$

即

$$u(x) = \int_{\partial B(0, r)} u(y) dS(y). \quad (2.6)$$

(2) 注意到

$$\int_{B(x, r)} u(y) dy = \int_0^r \int_{\partial B(x, t)} u(y) dS(y) dt,$$

再利用等式 (2.6), 则

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} u(y) dy &= u(x) \int_0^r n\alpha(n)t^{n-1} dt \\ &= \alpha(n)r^n u(x). \end{aligned}$$

于是我们完成定理的证明.

关于平均值公式的逆命题也成立.

定理 2.3 假设 $u \in C^2(\Omega)$ 满足, 对于任意 $B(x, r) \subset \Omega$,

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

则 u 是调和函数.

证明 对于固定的 $x \in \Omega$, 任意球 $B(x, r) \subset \Omega$, $\phi(r)$ 如定理 2.2 的证明中定义. 由假设我们得到 $\phi(r)$ 是一个常数, 因此

$$\phi'(r) = 0.$$

由定理 2.2 第一步的证明, 我们有

$$\frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy = 0,$$

于是

$$\int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy = 0.$$

令 $r \rightarrow 0$, 由 $\Delta u(x)$ 的连续性, 则

$$\Delta u(x) = 0.$$

至此我们完成定理的证明.

实际上, 定理 2.3 中光滑性条件 $u \in C^2(\Omega)$ 可减弱为 $u \in C(\Omega)$.

***定理 2.3'** 假设 $u \in C(\Omega)$ 满足平均值公式, 即对于任意 $B(x, r) \subset \Omega$, 有

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

则 u 是调和函数且 $u \in C^\infty(\Omega)$.

证明 设 $\eta: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个光滑化子, 即径向对称的非负函数 $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 满足:

(1) $\eta(x) = \zeta(|x|)$, 这里 $\zeta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个非负函数;

(2) 其支集 $\text{spt } \eta \subset B(0, 1)$;

$$(3) \int_{\mathbf{R}^n} \eta(x) dx = \int_{B(0, 1)} \eta(y) dy = 1.$$

对于 $\varepsilon > 0$, 定义

$$\eta_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

于是 $\text{spt } \eta_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$, 且

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \eta_\varepsilon(y) dy &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0, \varepsilon)} \eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \int_{B(0, 1)} \eta(y) dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

利用球坐标变换我们得到

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \zeta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \cdot n\alpha(n)r^{n-1} dr = 1.$$

对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 在区域 $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega | \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ 上定义

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy.$$

由于 η 无穷次可微且具有紧支集, 容易证明 $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. 对于任意 $x \in \Omega_\varepsilon$, 我们利用平均值公式计算得到

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \zeta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \zeta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(x) \cdot n\alpha(n)r^{n-1} dr \\ &= u(x). \end{aligned}$$

因而 $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们得到 $u \in C^\infty(\Omega)$. 至此定理 2.3' 得证.

附注 2.2 定理 2.3' 中 $u \in C(\Omega)$ 的假设还可以降低, 我们在这里就不展开讨论了.

定理 2.4 (Harnack 不等式) 对于 Ω 上的任何连通紧子集 V , 存在一个仅与距离函数

$$\text{dist}(V, \partial\Omega) = \min_{x \in V, y \in \partial\Omega} |x - y|$$

和维数 n 有关的正常数 C , 使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u, \quad (2.7)$$

其中 u 是 Ω 上的任意非负调和函数. 特别地, 对任意 $x, y \in V$,

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y).$$

证明 取 $r = \frac{1}{4}\text{dist}(V, \partial\Omega)$.

(1) 首先考虑 $x, y \in V$, $|x - y| \leq r$. 于是 $B(y, r) \subset B(x, 2r)$, 从而

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B(x, 2r)} u(z) dz \geq \frac{1}{2^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz \\ &\geq \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

(2) 由于 V 是连通的紧集, 我们可用一串有限多个半径为 r 的球 $\{B_i\}_{i=1}^N$ 覆盖它, 而且满足 $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ ($i = 2, \dots, N$). 于是, 对任意 $x, y \in V$, 有

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y).$$

至此我们完成定理的证明.

实际上, 我们可以证明下面更精确的结论.

***定理 2.4'** (Harnack 不等式) 假设 u 是半径为 R 的球 B_R 上的任意非负调和函数, 则对任意 $r \in (0, R)$, 成立不等式

$$\sup_{B_r} u \leq \left(\frac{R+r}{R-r} \right)^n \inf_{B_r} u,$$

其中 B_r 是以 r 为半径, 与 B_R 同心的球.

证明留作习题.

定理 2.5 (强极值原理) 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界开集, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是 Ω 上的调和函数, 则

(1) $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大(小)值一定在边界 $\partial\Omega$ 上达到, 即

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

(2) 如果 Ω 是连通的, 且存在 $x_0 \in \Omega$ 使得调和函数 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大(小)值, 则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数.

证明 仅就最大值的情形证明.

(1) 记

$$M = \max_{\bar{\Omega}} u(x).$$

如果 $u(x)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上的某点达到 M , 结论 (1) 自然成立. 如果 $u(x)$ 在 Ω 上的内点 $x_0 \in \Omega$ 达到 M , 即 $u(x_0) = M$, 我们证明在 Ω 的一个包含 x_0 的连通分支 Ω_1 上, 调和函数 $u(x)$ 恒为常数 M .

固定 $x_1 \in \Omega_1$, 则存在一条路径 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega_1$ 连接 x_0 和 x_1 两点, 也就是说, 路径 $\gamma(t)$ 关于 t 连续且 $\gamma(0) = x_0$ 和 $\gamma(1) = x_1$. 定义

$$l = \sup\{t \in [0, 1] | u[\gamma(t)] = M\},$$

我们将证明

$$l = 1,$$

从而得到 $u(x_1) = u[\gamma(1)] = M$.

我们用反证法证明 $l = 1$. 假设 $l < 1$, 记 $x_l = \gamma(l)$, 由函数 $u[\gamma(t)]$ 的连续性, 我们有 $u(x_l) = M$. 由于 x_l 是内点, 因此存在

$B(x_l, r_l) \subset \Omega_1$, 在 $B(x_l, r_l)$ 应用平均值公式并注意到 $u(x_l) = M$, 我们得到在 $B(x_l, r_l)$ 上函数 $u(x) = M$. 注意到 $\gamma(t)$ 在 l 处的连续性, 存在充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 γ 在区间 $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ 上的象集包含于 $B(x_l, r_l)$. 于是 $u[\gamma(l + \varepsilon)] = M$. 这与 l 是上确界的定义矛盾. 因此假设 $l < 1$ 不成立, 从而 $l = 1$.

这样我们证明了在 Ω 的包含 x_0 的连通分支 Ω_1 上, $u(x)$ 恒为常数 M . 由于函数 $u(x)$ 的连续性, $u(x)$ 在 Ω_1 的边界 $\partial\Omega_1$ 上也恒为常数 M . 而 Ω_1 的边界 $\partial\Omega_1$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的一部分, 从而得到定理的结论 (1) 成立.

(2) 当 Ω 连通时, Ω 只有一个连通分支, 从而 $\Omega_1 = \Omega$, 定理的结论 (2) 成立. 至此我们完成定理的证明.

附注 2.3 如果只有定理 2.5 中结论 (1) 成立, 我们通常称之为弱极值原理.

从以上极值原理我们容易证明 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

的解的惟一性.

推论 2.6 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界开集且 $g \in C(\partial\Omega)$ 和 $f \in C(\Omega)$, 则 Dirichlet 问题 (2.8) 最多存在一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

证明 假如存在两个解 u_1 和 u_2 , 并令 $w = u_1 - u_2$. 由于 Dirichlet 问题 (2.8) 是线性的, 故 w 满足齐次边值问题

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

我们需要证明 $w \equiv 0$. 利用极值原理我们得到, 对于 $x \in \Omega$, $w(x) \leq 0$. 注意到 $-w$ 满足同样的齐次边值问题, 于是对于 $x \in \Omega$, $w(x) \geq 0$. 因而 $w \equiv 0$. 至此我们完成推论 2.6 的证明.

下面我们利用平均值公式来推导出关于调和函数所有偏导数的估计, 然后以此来证明调和函数是解析函数.

定理 2.7 假设 u 是 Ω 上的调和函数, 则对于任意球 $B(x, r) \subset \Omega$, 任意阶数为 k 的多重指标 α , 估计

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B(x, r)} |u(y)| dy \quad (2.9)$$

成立, 其中

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(n+k)^{n+k}(n+1)^k}{\alpha(n)(n+1)^{n+1}} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

证明 我们对 k 利用数学归纳法证明公式 (2.9) 和 (2.10).

(1) 当 $k = 0$ 时, 公式 (2.9) 和 (2.10) 是平均值公式 (2.5) 的直接推论;

当 $k = 1$ 时, 我们注意到 u_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 也是调和函数, 于是在球 $B(x, s)$ ($0 < s \leq r$) 上利用平均值公式和 Gauss-Green 公式得

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x)| &= \left| \int_{B(x, s)} u_{x_i}(y) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{\alpha(n)s^n} \int_{\partial B(x, s)} u(y) \mathbf{n}_i(y) dS(y) \right|, \end{aligned}$$

从而有

$$\alpha(n)s^n |u_{x_i}(x)| \leq \int_{\partial B(x, s)} |u(y)| dS(y).$$

对上式两端在 $(0, r)$ 上积分我们得到

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x)| \int_0^r \alpha(n)s^n ds &\leq \int_0^r ds \int_{\partial B(x, s)} |u(y)| dS(y) \\ &= \int_{B(x, r)} |u(y)| dy, \end{aligned}$$

因而

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{n+1}{\alpha(n)r^{n+1}} \int_{B(x, r)} |u(y)| dy. \quad (2.11)$$

至此我们完成当 $k=1$ 时公式 (2.9) 和 (2.10) 的证明.

(2) 现在假设 $k \geq 2$ 且对于 Ω 上的所有球和 $k-1$ 阶的多重指标, 公式 (2.9) 和 (2.10) 成立. 固定 $B(x, r) \subset \Omega$. 令 α 为一个 k 阶多重指标, 必然存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 和一个 $k-1$ 阶的多重指标 β , 使得 $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$. 令 $v = D^\beta u$. 由于 v 是调和函数, 对于任意 $0 < t < 1$, 在球 $B(x, tr)$ 上应用不等式 (2.11) 有

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{n+1}{\alpha(n)(tr)^{n+1}} \int_{B(x, tr)} |D^\beta u(y)| dy.$$

注意到 $y \in B(x, tr)$ 蕴涵着 $B(y, (1-t)r) \subset B(x, r) \subset \Omega$. 由我们的假设, 公式 (2.9) 和 (2.10) 蕴涵着: 对任意 $0 < t < 1$, 有

$$\begin{aligned} |D^\beta u(y)| &\leq \frac{C_{k-1}}{[(1-t)r]^{n+k-1}} \int_{B(y, (1-t)r)} |u(z)| dz \\ &\leq \frac{C_{k-1}}{[(1-t)r]^{n+k-1}} \int_{B(x, r)} |u(z)| dz. \end{aligned}$$

综上, 我们得到

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &\leq \frac{n+1}{\alpha(n)(tr)^{n+1}} \alpha(n)(tr)^n \max_{y \in B(x, tr)} |D^\beta u(y)| \\ &\leq \frac{(n+1)C_{k-1}}{r^{n+k}t(1-t)^{n+k-1}} \int_{B(x, r)} |u(z)| dz. \end{aligned}$$

又易证函数 $f(t) = t(1-t)^{n+k-1}$ 在 $t = \frac{1}{n+k}$ 时达到在区间 $(0, 1)$ 上的最大值, 故在上式中取 $t = \frac{1}{n+k}$, 我们得到

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B(x, r)} |u(y)| dy,$$

其中

$$C_k = (n+1)C_{k-1} \frac{(n+k)^{n+k}}{(n+k-1)^{n+k-1}}.$$

记

$$B_k = \frac{C_k}{(n+k)^{n+k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

则我们有递推关系式

$$B_k = (n+1)B_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

从而

$$B_k = (n+1)^{k-1}B_1, \quad k = 2, 3, \dots.$$

注意到 $C_1 = \frac{n+1}{\alpha(n)}$ 和 $B_1 = \frac{C_1}{(n+1)^{n+1}}$, 我们得到

$$\begin{aligned} C_k &= B_k(n+k)^{n+k} \\ &= \frac{(n+k)^{n+k}(n+1)^k}{\alpha(n)(n+1)^{n+1}} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

这就完成当 $|\alpha| = k$ 时公式 (2.9) 和 (2.10) 的证明, 从而完成定理的证明.

作为定理 2.7 的推论, 我们证明下面的 Liouville 定理.

定理 2.8 (Liouville 定理) 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界调和函数, 则 u 是常数.

证明 设 $|u| \leq M$. 固定 $x \in \mathbf{R}^n$. 对任意 $r > 0$, 在球 $B(x, r)$ 上利用定理 2.7 当 $k=1$ 时的结论, 则

$$|Du(x)| \leq \frac{nC_1}{r^{n+1}} \int_{B(x, r)} |u(y)| dy \leq \frac{nC_1 \alpha(n)}{r} M.$$

令 $r \rightarrow +\infty$, 我们有

$$Du(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

因此 u 是常数. 至此我们完成定理的证明.

利用 Harnack 不等式 (定理 2.4'), 我们还可以证明更强的结论.

***定理 2.8'** 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 的上有界 (或下有界) 调和函数, 则 u 是一个常数. (这里 u 上有界是指存在一个常数 M , 使得对于任意 $x \in \mathbf{R}^n$, 有 $u(x) \leq M$ 成立)

证明留作习题.

作为定理 2.7 的推论, 我们可进一步证明如下结论.

定理 2.9 假设 u 是 Ω 上的调和函数, 则 u 是 Ω 上的解析函数.

证明 固定 $x_0 \in \Omega$. 我们要证 $u(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可表示为一个收敛的幂级数. 取 $r = \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, 并记

$$A = \frac{1}{\alpha(n)(n+1)^{n+1}r^n} \int_{B(x_0, 2r)} |u(y)| dy.$$

对任意 $x \in B(x_0, r)$, 则 $B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset \Omega$. 由定理 2.7 得到

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{A}{r^N} (n+N)^{n+N} (n+1)^N,$$

其中 $|\alpha| = N$. 利用 Stirling 公式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{N!e^N} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} < 1,$$

我们得到, 当 N 充分大时,

$$\begin{aligned} (n+N)^{n+N} &= \left(1 + \frac{n}{N}\right)^N (N+n)^n N^N \\ &\leq e^n (2N)^n N^N \\ &\leq 2^n e^n N! e^N N^{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

我们将要证明, 当

$$|x - x_0| \leq \frac{r}{2n(n+1)e} \quad (2.12)$$

时, $u(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

收敛到 $u(x)$.

实际上, 对充分大的 N , 存在 $t = t(x) \in (0, 1)$ 使得 $u(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数的 N 项可以表示为

$$\begin{aligned} R_N(x) &= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u[x_0 + t(x - x_0)]}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha. \end{aligned}$$

利用组合公式

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} = n^N$$

我们得到, 当 N 充分大时,

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq A \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} (n+N)^{n+N} \left[\frac{(n+1)|x - x_0|}{r} \right]^N \\ &= 2^n e^n A \left(\sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \right) e^N N^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{(n+1)|x - x_0|}{r} \right]^N \\ &\leq 2^n e^n A \left[\frac{n(n+1)e|x - x_0|}{r} \right]^N N^{n-\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^n e^n A \frac{N^{n-\frac{1}{2}}}{2^N}, \end{aligned}$$

从而 $u(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数的 N 项 $R_N(x)$ 在 x_0 的上述邻域内一致收敛到 0. 因此 $u(x)$ 在 x_0 的某个邻域内可表示为一个收敛的幂级数. 至此我们完成定理的证明.

定理 2.10 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位球 B_1 上的调和函数, 则

$$H(r) = \int_{\partial B_r} u^2 dS, \quad D(r) = r^2 \int_{B_r} |\nabla u|^2 dy$$

是 r 的单调递增函数, 其中 B_r 是与 B_1 同心, 以 r 为半径的球.

证明 作伸缩变换, 显然有

$$H(r) = \int_{\partial B_1} u^2(rz) dS(z).$$

对 r 求微商, 我们得到

$$\begin{aligned}
H'(r) &= \int_{\partial B_1} Du^2(rz) \cdot z \, dS(z) \\
&= \int_{\partial B_r} \frac{\partial u^2(y)}{\partial \mathbf{n}} \, dS(y) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B_r} \Delta u^2 \, dy \\
&= \frac{2}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dy \\
&= \frac{2}{nr} D(r) \geq 0,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为球面 ∂B_r 的单位外法向量.

作伸缩变换, 我们有

$$D(r) = r^2 \int_{B_1} |\nabla u|^2(rz) \, dz.$$

对 r 求微商, 我们得到

$$\begin{aligned}
D'(r) &= 2r \int_{B_1} |\nabla u|^2(rz) \, dz + r^2 \int_{B_1} D(|\nabla u|^2(rz)) \cdot z \, dz \\
&= \frac{2}{r} D(r) + 2r^2 \int_{B_1} \sum_{i,j=1}^n u_i(rz) u_{ij}(rz) z_j \, dz \\
&= \frac{2}{r} D(r) + 2r \int_{B_r} \sum_{i,j=1}^n u_i(y) u_{ji}(y) y_j \, dy \\
&= \frac{2}{r} D(r) + \frac{2}{\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B_r} \sum_{i,j=1}^n [(u_i u_j y_j)_i - u_i u_j \delta_{ij}] \, dy \\
&= \frac{2}{\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \sum_{i,j=1}^n (u_i u_j y_j) y_i \, dS(y) \\
&= 2nr \int_{\partial B_r} \sum_{i,j=1}^n \left(u_i \frac{y_i}{r} \right) \left(u_j \frac{y_j}{r} \right) \, dS(y)
\end{aligned}$$

$$= 2nr \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \, dS(y) \geq 0.$$

于是我们完成定理的证明.

定理 2.11 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位球 B_1 上的调和函数, 则

$$f(r) = \frac{D(r)}{H(r)}$$

是 r 的单调递增函数.

证明 由于

$$D(r) = \frac{nr}{2} H'(r),$$

且

$$H'(r) = \int_{\partial B_r} \frac{\partial u^2}{\partial \mathbf{n}} \, dS, \quad D'(r) = 2nr \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \, dS,$$

求 $f(r)$ 对 r 的微商, 得到

$$\begin{aligned}
f'(r) &= H^{-2} (D'(r)H(r) - H'(r)D(r)) \\
&= H^{-2} \left(2nr \int_{\partial B_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \, dS \cdot \int_{\partial B_r} u^2 \, dS - \frac{nr}{2} \left[\int_{\partial B_r} \frac{\partial u^2}{\partial \mathbf{n}} \, dS \right]^2 \right) \\
&= 2nr H^{-2} \left(\int_{\partial B_r} |u_{\mathbf{n}}|^2 \, dS \cdot \int_{\partial B_r} u^2 \, dS - \left[\int_{\partial B_r} u u_{\mathbf{n}} \, dS \right]^2 \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

于是我们完成定理的证明.

本节讨论的内容都是调和函数的基本性质. 我们在习题中还列举了一些关于调和函数的有趣的结论, 这些结论可以利用这一节中讲述的方法加以证明.

§ 2.2 基本解和 Green 函数

在这节中, 我们将通过求解 Laplace 方程 (2.2) 的径向对称解来

导出 Laplace 方程 (2.2) 的基本解, 然后利用基本解来求出位势方程 (2.1) 在全空间上的解的具体形式, 最后用基本解来导出 Green 函数, 并求出一些特殊区域上 Green 函数的具体形式. 通过 Green 函数我们可以求出 Laplace 方程 (2.2) 的 Dirichlet 问题的解的表达式.

2.2.1 基本解

我们对 Laplace 方程 (2.2) 在 $\mathbf{R}^n$ 上试一试能否求得径向对称的解, 即假设 $u(x) = v(r)$, 其中 $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, $v: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个函数且满足 Laplace 方程. 注意到, 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r},$$

我们得到

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= v'(r) \frac{x_i}{r}, \\ u_{x_i x_i} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \end{aligned}$$

从而

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r),$$

于是 $\Delta u = 0$ 当且仅当

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0. \quad (2.13)$$

令 $w = v'(r)$, 等式 (2.13) 化为一阶常微分方程

$$w' + \frac{n-1}{r} w = 0.$$

我们求得

$$w(r) = \frac{a}{r^{n-1}},$$

其中 $a \in \mathbf{R}$ 为任意常数. 于是, 当 $r \neq 0$ 时,

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3 \end{cases}$$

满足方程 (2.13), 这里 b 和 c 是任意常数. 但当 $b \neq 0$, $r = 0$ 时, $v(r)$ 没有意义, 这说明 Laplace 方程在全空间没有径向对称的解. 显然任意常数是 Laplace 方程的解.

这证明了如下事实: 如果一个在 $\mathbf{R}^n$ 上的调和函数是径向对称的, 则它必为常数.

严格来说, $v(r)$ 不是 Laplace 方程的解. 尽管如此, 由于 $v(r)$ 仅仅在 $r = 0$ 时不满足 Laplace 方程而在 $r \neq 0$ 时满足 Laplace 方程, 这类函数仍然有很大的用途. 特别地, 取 $c = 0$, 我们引入如下概念.

定义 2.2 对 $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, 称函数

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (2.14)$$

为 Laplace 方程的**基本解**.

为何如此选取函数 $\Gamma(x)$ 的系数将很快自明. 特别地, 我们注意到如下简单事实: 对于 $x \neq 0$,

$$|D\Gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^n},$$

其中 C 是一个仅依赖于空间维数 n 的正常数.

方程的基本解具有很强的物理意义: 当 $n = 3$ 时, 基本解 $\Gamma(x)$ 就是由放置在原点的单位正点电荷引起的在全空间 $\mathbf{R}^3$ 上的静电位势分布.

***附注 2.4** 我们通常用 $L^1(\Omega)$ 表示 Ω 上的可积函数空间, 用 $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ 表示 Ω 上的局部可积函数空间. 实际上, 基本解 $\Gamma(x) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n)$ 且在广义函数意义下满足方程

$$-\Delta \Gamma(x) = \delta(x),$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac 测度. 也就是说, 对于任意 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 成立

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x) [-\Delta f(x)] dx = f(0).$$

注意到当 $x \neq 0$ 时, $\Gamma(x)$ 满足 Laplace 方程 (2.2). 作平移变换, 我们知道, 当 $x \neq y$ 时, $\Gamma(x-y)$ 满足 Laplace 方程 (2.2). 由于方程 (2.2) 是线性的, 我们尝试求下列形式的解:

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy. \quad (2.15)$$

然而, 由于 $D^2\Gamma(x-y)$ 在 $x=y$ 附近不可积, 故 $u(x)$ 并不满足 Laplace 方程 (2.2). 不过经仔细计算我们得到如下结论.

定理 2.12 假设 $f(x) \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, $u(x)$ 由 (2.15) 式定义, 则 $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ 且满足

$$-\Delta u = f.$$

此定理说明我们可以利用基本解来构造位势方程 (2.1) 在全空间上的解. 在证明此定理之前, 我们引述以下 Gauss-Green 公式的推论 (见 §1.4 习题的第 4 题).

引理 2.13 如果 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS(x),$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

定理 2.12 的证明 固定 $x \in \mathbf{R}^n$.

(1) 我们注意到

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(y) f(x-y) dy,$$

从而有

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right] dy,$$

其中 e_i 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的第 i 个方向向量. 由于 f 具有紧支集, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y),$$

且上述极限关于 y 一致收敛. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(y) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y) dy \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

同理我们得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y) dy \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

由于上式右端项对变量 x 是连续的, 因而 $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$. 实际上, 由于 f 具有紧支集, 我们有: 存在 $M_0 > 0$, 使得对所有 $x \in \mathbf{R}^n$, 有

$$|f(x)| + |Df(x)| + |D^2f(x)| \leq M_0.$$

由此容易证明 u, Du, D^2u 是有界的, 即存在 $M_1 > 0$ 使得对所有 $x \in \mathbf{R}^n$, 有

$$|u(x)| + |Du(x)| + |D^2u(x)| \leq M_1.$$

(2) 固定 $\varepsilon > 0$, 则

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy, \end{aligned}$$

这里 Δ_x 是关于变量 x 的 Laplace 算子 Δ . 记

$$I_\varepsilon = \int_{B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy,$$

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy,$$

于是

$$\Delta u = I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

我们首先估计 I_ε . 利用函数 f 的有界性我们容易证明

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon| &\leq M_0 \int_{B(0,\varepsilon)} |\Gamma(y)| dy \\ &\leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|, & n=2, \\ C\varepsilon^2, & n \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中 C 是不依赖于 ε 的常数.

由于函数 $f(y) \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 具有紧支集, 因而函数 $f(x-y)$ 具有紧支集. 故存在一个正数 $R_x > 0$, 使得 $f(x-y)$ 的支集 $\text{spt } f(x-y) \subset B(0, R_x)$. 由引理 2.11 我们可以将 J_ε 表示成

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbf{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= \int_{B(0,R_x) \setminus B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= \int_{B(0,R_x) \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta \Gamma(y) f(x-y) dy \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R_x) \cup \partial B(0,\varepsilon)} \left[\Gamma(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} f(x-y) - \frac{\partial \Gamma(y)}{\partial \mathbf{n}} f(x-y) \right] dS(y) \\ &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \left[\Gamma(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} f(x-y) - \frac{\partial \Gamma(y)}{\partial \mathbf{n}} f(x-y) \right] dS(y), \end{aligned}$$

其中在球面 $\partial B(0,\varepsilon)$ 上 $\mathbf{n}$ 表示单位内法向量, 在球面 $\partial B(0,R_x)$ 上 $\mathbf{n}$ 表示单位外法向量. 记

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Gamma(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} f(x-y) dS(y), \\ L_\varepsilon &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Gamma(y)}{\partial \mathbf{n}} f(x-y) dS(y), \end{aligned}$$

于是

$$J_\varepsilon = K_\varepsilon + L_\varepsilon.$$

我们首先估计 K_ε , 然后再计算 L_ε . 利用函数 f 的梯度 Df 的有界性我们容易证明

$$\begin{aligned} |K_\varepsilon| &\leq M_0 \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Gamma(y)| dS(y) \\ &\leq \begin{cases} C\varepsilon |\ln \varepsilon|, & n=2, \\ C\varepsilon, & n \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

其中 C 是不依赖于 ε 的常数.

注意到在 $\partial B(0,\varepsilon)$ 上, 有

$$D\Gamma(y) = \frac{-y}{n\alpha(n)|y|^n}, \quad \mathbf{n} = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon},$$

于是

$$\frac{\partial \Gamma(y)}{\partial \mathbf{n}} = D\Gamma(y) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}.$$

由中值公式我们得到

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) dS(y) \\ &= -\frac{f(x-y_\varepsilon)}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} dS(y) \\ &= -f(x-y_\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中 $y_\varepsilon \in \partial B(0,\varepsilon)$. 由函数 f 的连续性, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $L_\varepsilon \rightarrow -f(x)$.

综上所述, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\Delta u = I_\varepsilon + K_\varepsilon + L_\varepsilon.$$

利用公式 (2.16), (2.17) 和 (2.18), 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有

$$-\Delta u(x) = f(x).$$

至此我们完成定理的证明.

定理 2.14 假设 $f(x) \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 则

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x-y)f(y) dy + C$$

是位势方程 (2.1) 在全空间 $\mathbf{R}^n$ 上所有的有界解.

证明 利用定理 2.12 和定理 2.8 (Liouville 定理) 得证.

利用 Gauss-Green 公式的推论, 我们还可以得到关于第二边值问题的一些结论.

定义 2.3 齐次边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

称为**特征值问题**, 使此问题有非零解的 $\lambda \in \mathbf{R}$ 称为此问题的**特征值**, 相应的非零解称为对应于这个特征值的**特征函数**, 记为 u_λ .

在特征值问题 (2.19) 的方程两端同乘 u 并在 Ω 上积分, 我们不难证明特征值 $\lambda \geq 0$.

定理 2.15 第二边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = g \end{cases} \quad (2.20)$$

有 $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 上的解的必要条件是对于相应的任意特征函数 $u_\lambda(x)$, 成立

$$\int_{\Omega} f(x)u_\lambda(x) dx + \int_{\partial \Omega} g(x)u_\lambda(x) dS(x) = 0. \quad (2.21)$$

证明 在引理 2.13 公式中, 取 u 为第二边值问题 (2.20) 的解, $v = u_\lambda(x)$, 立即得到要证的结论.

特别地, $\lambda = 0$ 是特征值问题 (2.19) 的一个特征值, 相应的特征函数 $u_\lambda = 1$. 作为定理 2.15 的推论, 我们得到下面的结论.

推论 2.16 Poisson 方程的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = g \end{cases} \quad (2.22)$$

有 $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 上的解的必要条件是

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial \Omega} g(x) dS(x) = 0. \quad (2.23)$$

实际上, 对于 Neumann 边值问题 (2.22) 的方程两端在 Ω 上积分, 利用 Gauss-Green 公式也可以得到上式.

2.2.2 Green 函数

在这一小节中我们旨在得到 Dirichlet 问题 (2.8) 的求解公式. 为此我们利用基本解来构造 Green 函数, 并以此来获得解的表达式.

假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是有界开集且 $\partial \Omega$ 光滑, 且 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题 (2.8) 的解. 固定 $x \in \Omega$. 取充分小 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. 在区域 $\Omega \setminus B(x, \varepsilon)$ 上对 $u(y)$ 和基本解 $\Gamma(y-x)$ 应用引理 2.13 的公式得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus B(x, \varepsilon)} \left[u(y) \Delta \Gamma(y-x) - \Gamma(y-x) \Delta u(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial \Omega} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Gamma(y-x) - \Gamma(y-x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(y) \right] dS(y) \\ & \quad + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Gamma(y-x) - \Gamma(y-x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(y) \right] dS(y), \end{aligned}$$

其中在球面 $\partial B(0, \varepsilon)$ 上 $\mathbf{n}$ 表示单位内法向量, 在边界 $\partial \Omega$ 上 $\mathbf{n}$ 表示单位外法向量. 注意到, 当 $x \neq y$ 时, $\Delta \Gamma(x-y) = 0$, 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Gamma(y-x) dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) dS(y) \longrightarrow u(x) \end{aligned}$$

和

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Gamma(y-x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(y) dS(y)$$

$$\leq C\varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Gamma| \longrightarrow 0,$$

从而得到

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\partial\Omega} \left[\Gamma(y-x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Gamma(y-x) \right] dS(y) \\ & - \int_{\Omega} \Gamma(y-x) \Delta u(y) dy. \end{aligned} \quad (2.24)$$

但是, 对于 Dirichlet 问题 (2.8) 来说, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(y)$ 仍然未知. 我们将通过引进一个调和函数 ϕ^x 来消掉这一项.

假定对给定 $x \in \Omega$, 函数 ϕ^x 满足方程

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x(y) = 0, & y \in \Omega, \\ \phi^x|_{\partial\Omega} = \Gamma(y-x). \end{cases} \quad (2.25)$$

在 Ω 上对 $u(y)$ 和解 $\phi^x(y)$ 应用引理 2.11 的公式得

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \mathbf{n}} - \Gamma(y-x) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS(y) + \int_{\Omega} \phi^x(y) \Delta u(y) dy. \quad (2.26)$$

现在将 (2.24) 和 (2.26) 相加, 于是我们得到

$$\begin{aligned} u(x) = & - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left[\Gamma(y-x) - \phi^x(y) \right] dS(y) \\ & - \int_{\Omega} \left[\Gamma(y-x) - \phi^x(y) \right] \Delta u(y) dy. \end{aligned}$$

定义 2.4 对于任意 $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, 函数

$$G(x, y) = \Gamma(y-x) - \phi^x(y)$$

称为 Ω 上的 **Green 函数**.

附注 2.5 显然, 当 $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ 时, $G(x, y) = 0$. 实际上, Green 函数就是基本解减去一个以基本解为边值的调和函数. 由于函数 $\Gamma(y-x)$ 在 $\partial\Omega$ 附近是一个 C^∞ 的光滑函数, 当 Ω 满足一定

的条件时, $\phi^x(y)$ 的存在性可以比较容易地得到 (参阅文献 [4] 中第二章第八节).

据定义 2.4, 上述 $u(x)$ 可表示为

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) dS(y) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy,$$

于是我们得到下面的结论.

定理 2.17 (解的表达式) 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个有界区域, $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题 (2.8) 的解, 则

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) dS(y) + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (2.27)$$

附注 2.6 Green 函数 $G(x, y)$ ($n = 2, 3$) 的物理意义如下: 在物体内部 x 处放置一个单位点热源, 与外界接触的表面保持零度, 那么物体的稳定温度场就是 Green 函数; 或者让某导体的表面接地, 在其内部 x 处放置一个单位正电荷, 那么在导体内部所产生的电势分布也是 Green 函数.

附注 2.7 引入 Green 函数 $G(x, y)$ 的重要意义在于把求解具有任意非齐次项与任意边值的定解问题 (2.8) 归结为求解一个特定的边值问题 (2.25). 对于一些特殊区域, 这样的特定的边值问题可以得到解的具体表达式. 在一般情形, 虽然不可能给出 Green 函数的表达式, 但 Green 函数只依赖于区域, 而与边值和非齐次项无关, 这无论对理论研究还是对求解问题都带来很大的方便.

下面我们来证明 Green 函数的一个性质.

定理 2.18 (Green 函数的对称性) 对所有 $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, 有

$$G(y, x) = G(x, y).$$

证明 固定 $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. 取充分小 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon) \subset \Omega$ 和 $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. 令

$$v(z) = G(x, z), \quad w(z) = G(y, z),$$

则

$$\Delta v(z) = 0, \quad (z \neq x),$$

$$\Delta w(z) = 0, \quad (z \neq y).$$

在区域 $\Omega \setminus [B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)]$ 上对 $v(z)$ 和 $w(z)$ 应用引理 2.13 的公式得

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v \right) dS(z) = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w \right) dS(z), \quad (2.28)$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 $B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$ 上单位内法向量.

我们首先考虑上式的左端项. 由于 $\phi^x(z)$ 在 Ω 是有界的调和函数 (见本章第三节) 且 w 在 x 附近光滑, 故

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v dS(z) \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x, \varepsilon)} |v|,$$

其中 C 是不依赖于 ε 的常数. 因此

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v dS(z) = 0.$$

另外 $v(z) = \Gamma(z - x) - \phi^x(z)$, 从而

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v(z)}{\partial \mathbf{n}} w(z) dS(z) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Gamma(z - x) w(z) dS(z) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} w(z) dS(z) \\ &= w(x). \end{aligned}$$

因此, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 式 (2.28) 的左端趋于 $w(x)$, 而其右端趋于 $v(y)$. 于是

$$w(x) = v(y),$$

从而

$$G(y, x) = G(x, y).$$

至此我们完成定理的证明.

为了求出 Green 函数, 我们需要求解初值问题 (2.25). 对于一些具有对称性的特殊区域, 我们可以利用区域的对称性来求解.

1. 半空间上的 Green 函数

在以下的篇幅中, 我们将构造出半空间 $\mathbf{R}_+^n$ 上的 Green 函数, 并推导出半空间 $\mathbf{R}_+^n$ 上 Dirichlet 问题 (2.8) 的解的 Poisson 公式.

对于 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n$, 记它关于边界 $\partial \mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1}$ 的反射点为 $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. 取

$$\phi^x(y) = \Gamma(y - \tilde{x}) \quad (x, y \in \mathbf{R}_+^n).$$

注意到, 当 $y \in \partial \mathbf{R}_+^n$ 时, $\phi^x(y) = \Gamma(y - x)$, 于是 $\phi^x(y)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x(y) = 0, & y \in \mathbf{R}_+^n, \\ \phi^x = \Gamma(y - x), & y \in \partial \mathbf{R}_+^n. \end{cases}$$

因此 $\mathbf{R}_+^n$ 上的 Green 函数为

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \Gamma(y - x) - \phi^x(y) \\ &= \Gamma(y - x) - \Gamma(y - \tilde{x}). \end{aligned}$$

我们分别考虑下列两种情形:

(1) 当 $n \geq 3$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_n} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma(y - x) - \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma(y - \tilde{x}) \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \left(\frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right), \end{aligned}$$

且边界 $\partial \mathbf{R}_+^n$ 的单位外法向量 $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, -1)$. 因此, 当 $x \in \mathbf{R}_+^n$, $y \in \partial \mathbf{R}_+^n$ 时, 有

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y_n} G(x, y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)|y - x|^n}, \quad (2.29)$$

其中

$$|y-x|^2 = (y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_{n-1}-x_{n-1})^2 + x_n^2;$$

(2) 当 $n=2$ 时, 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_2} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y_2} \Gamma(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_2} \Gamma(y-\tilde{x}) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{y_2-x_2}{|y-x|^2} - \frac{y_2+x_2}{|y-\tilde{x}|^2} \right),\end{aligned}$$

且 $\alpha(2) = \pi$, 因此, 当 $x \in \mathbf{R}_+^2, y \in \partial\mathbf{R}_+^2$ 时, 有

$$\frac{\partial}{\partial n} G(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y_2} G(x, y) = -\frac{2x_2}{2\alpha(2)|y-x|^2},$$

其中

$$|y-x|^2 = (y_1-x_1)^2 + x_2^2.$$

综上所述, 当 $n \geq 2$ 时, 公式 (2.29) 成立.

假设 $u \in C^2(\mathbf{R}_+^n) \cap C(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ ($n \geq 2$) 是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}_+^n, \\ u = g, & x \in \partial\mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1} \end{cases} \quad (2.30)$$

的有界解. 由定理 2.15 的解的表达式我们期望

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|y-x|^n} dy \quad (2.31)$$

是方程 (2.30) 的解. 通常称函数

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)|y-x|^n} \quad (x \in \mathbf{R}_+^n, y \in \partial\mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1})$$

为 $\mathbf{R}_+^n$ 的 **Poisson 核**, 并称公式 (2.31) 为 **Poisson 公式**. 特别地,

当 $n=2$ 时, 记 $u(x) = u(x_1, x_2)$, 则 Poisson 公式 (2.31) 为

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(y)}{(y-x_1)^2 + x_2^2} dy.$$

但是, 上述 Poisson 公式 (2.31) 只给出边值问题 (2.30) 的形式解, 因为此时区域 $\mathbf{R}_+^n$ 是无界的, 公式 (2.31) 的推导并不严格. 为此我们需要验证公式 (2.31) 的确给出边值问题 (2.30) 的解. 实际上, 我们利用 Poisson 公式 (2.31) 构造出在上半空间 $\mathbf{R}_+^n$ 的边界 $\partial\mathbf{R}_+^n$ 上指定取值的上半空间 $\mathbf{R}_+^n$ 上的调和函数. 注意 Poisson 公式 (2.31) 中 $u(x)$ 在上半空间的边界 $\partial\mathbf{R}_+^n$ 上并没有定义, 因而在 Dirichlet 问题 (2.30) 中, $u(x)$ 在边界 $\partial\mathbf{R}_+^n$ 上取边值 $g(x)$ 是在取极限的意义下成立的.

定理 2.19 假设 g 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ ($n \geq 2$) 上有界连续函数. 对于任意 $x \in \mathbf{R}_+^n$, $u(x)$ 由 Poisson 公式 (2.31) 定义, 即

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x, y) g(y) dy,$$

则

- (1) $u(x)$ 是 $\mathbf{R}_+^n$ 上无穷次可微的有界函数;
- (2) $\Delta u(x) = 0, x \in \mathbf{R}_+^n$;
- (3) 对于任意 $x_0 \in \partial\mathbf{R}_+^n$, 当 $x \in \mathbf{R}_+^n$ 且 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x) \rightarrow g(x_0)$.

证明 (1) 对任意 $x \in \mathbf{R}_+^n$, 我们可以证明

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x, y) dy = 1. \quad (2.32)$$

由定理的假设, 存在 $M > 0$, 使得 $|g| \leq M$. 因此公式 (2.31) 定义的 $u(x)$ 是有界的. 当 $x \neq y$ 时, $K(x, y)$ 是光滑的. 我们易证 $u \in C^\infty(\mathbf{R}_+^n)$.

(2) 当 $x \neq y$ 时, $\Delta_x G(x, y) = 0$, 于是 $\Delta_x \frac{\partial}{\partial y_n} G(x, y) = 0$. 所

以, 当 $x \in \mathbf{R}_+^n, y \in \partial\mathbf{R}_+^n$ 时, 有 $\Delta_x K(x, y) = 0$, 且

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \Delta_x K(x, y) g(y) dy = 0.$$

(3) 固定 $x_0 \in \partial\mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1}$, $\varepsilon > 0$. 取 $\delta_1 > 0$ 足够小, 使得当 $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ 且 $|y-x_0| \leq \delta_1$ 时, 有

$$|g(y) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $x \in \mathbf{R}_+^n$ 且 $|x - x_0| \leq \frac{\delta_1}{2}$ 时, 利用等式 (2.32) 我们计算得

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x, y)[g(y) - g(x_0)] dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^{n-1} \cap B(x_0, \delta_1)} K(x, y)|g(y) - g(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta_1)} K(x, y)|g(y) - g(x_0)| dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \int_{\mathbf{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta_1)} K(x, y) dy, \end{aligned}$$

这里 $B(x_0, \delta_1)$ 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上以 x_0 为心, δ_1 为半径的 $n-1$ 维球.

如果 $|x - x_0| \leq \frac{\delta_1}{2}$ 和 $|y - x_0| \geq \delta_1$, 我们有

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

从而

$$\begin{aligned} |y - x_0| &\leq |y - x| + |x - x_0| \\ &\leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|, \end{aligned}$$

因此

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|.$$

当 $|x - x_0| \leq \frac{\delta_1}{2}$ 时, 我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta_1)} K(x, y) dy \\ &\leq x_n \frac{2^{n+1}}{n\alpha(n)} \int_{\mathbf{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta_1)} |y - x_0|^{-n} dy \\ &\leq C(n, \delta_1)x_n, \end{aligned}$$

这里 $C(n, \delta_1)$ 是仅依赖于 n, δ_1 的常数. 取 $\delta_2 > 0$ 足够小, 使当 $0 < x_n \leq \delta_2$ 时, 有

$$2M \int_{\mathbf{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta_1)} K(x, y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 当 $|x - x_0| \leq \delta = \min \left\{ \frac{\delta_1}{2}, \delta_2 \right\}$ 时, 有

$$|u(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

至此我们完成定理的证明.

2. 球上的 Green 函数

在以下的篇幅中, 我们将构造出球 $B(0, R)$ 上的 Green 函数, 并推导出球 $B(0, R)$ 上 Dirichlet 问题 (2.8) 的解的 Poisson 公式.

我们先构造出单位球 $B(0, 1)$ 上的 Green 函数, 然后通过伸缩变换获得一般球 $B(0, R)$ 上的 Green 函数. 对于 $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, 记它关于球面 $\partial B(0, 1)$ 的对偶点为 $x^* = \frac{x}{|x|^2}$. 显然 $|x^*||x| = 1$ (见图 2.1).

我们将利用单位球的性质来构造其上的 Green 函数. 首先我们需要求解如下问题:

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x(y) = 0, & y \in B(0, 1), \\ \phi^x = \Gamma(y - x), & y \in \partial B(0, 1). \end{cases}$$

我们分别考虑下列两种情形:

(1) 假设 $n \geq 3$. 当 $y \neq x^*$ 时, $\Delta_y \Gamma(y - x^*) = 0$, 于是

$$\Delta_y \Gamma[|x|(y - x^*)] = 0.$$

由对偶点 x^* 与点 x 的关系, 当 $y \in \partial B(0, 1)$ 时, $|x||y - x^*| = |y - x|$ (见图 2.2), 于是当 $y \in \partial B(0, 1)$ 时, $\Gamma[|x|(y - x^*)] = \Gamma(y - x)$. 定义 $\phi^x(y) = \Gamma(|x|(y - x^*))$, 则

$$\begin{cases} -\Delta \phi^x(y) = 0, & y \in B(0, 1), \\ \phi^x(y) = \Gamma(y - x), & y \in \partial B(0, 1). \end{cases}$$

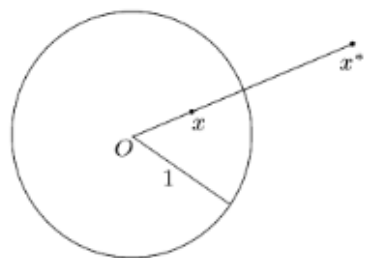


图 2.1

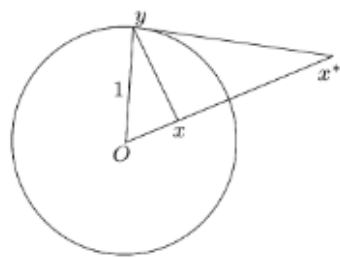


图 2.2

因此 $B(0,1)$ 上的 Green 函数为

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \Gamma(y - x) - \phi^x(y) \\ &= \Gamma(y - x) - \Gamma[|x|(y - x^*)]. \end{aligned}$$

所以, 当 $y \in \partial B(0,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y_i} \Gamma(y - x) - \frac{\partial}{\partial y_i} \Gamma[|x|(y - x^*)] \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \left[\frac{x_i - y_i}{|y - x|^n} + \frac{|x|^2(y_i - x_i^*)}{|x|^n |y - x^*|^n} \right] \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \left(\frac{x_i - y_i}{|y - x|^n} + \frac{y_i |x|^2 - x_i}{|y - x|^n} \right) \\ &= -\frac{y_i(1 - |x|^2)}{n\alpha(n)|y - x|^n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

由于单位球 $B(0,1)$ 上的单位外法向量 $\mathbf{n} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 且

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) = DG(x, y) \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y),$$

故我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) = -\frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)|x - y|^n}. \quad (2.33)$$

(2) 假设 $n = 2$. 由基本解的表达式我们知道

$$G(x, y) = \Gamma(y - x) - \Gamma[|x|(y - x^*)]$$

仍然是 $B(0,1)$ 上的 Green 函数. 当 $y \in \partial B(0,1)$ 时, $|x||y - x^*| = |y - x|$. 因此, 当 $y \in \partial B(0,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y_i} \Gamma(y - x) - \frac{\partial}{\partial y_i} \Gamma[|x|(y - x^*)] \\ &= \frac{x_i - y_i}{2\pi|y - x|^2} + \frac{|x|^2(y_i - x_i^*)}{2\pi|x|^2|y - x^*|^2} \\ &= \frac{x_i - y_i}{2\pi|y - x|^2} + \frac{y_i|x|^2 - x_i}{2\pi|y - x|^2} \\ &= -\frac{y_i(1 - |x|^2)}{2\alpha(2)|y - x|^2}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) = \sum_{i=1}^2 y_i \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{2\alpha(2)|x - y|^2}.$$

综上所述, 当 $n \geq 2$ 时, 公式 (2.33) 成立.

假设 $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\bar{B}(0,1))$ 是

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B(0,1), \\ u = g, & x \in \partial B(0,1) \end{cases} \quad (2.34)$$

的解, 则由定理 2.15 的表达式我们得到

$$u(x) = - \int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(x, y) dS(y). \quad (2.35)$$

于是由公式 (2.33) 得到

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y).$$

假设 $u \in C^2(B(0,R)) \cap C(\bar{B}(0,R))$ 是

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B(0,R), \\ u = g, & x \in \partial B(0,R) \end{cases} \quad (2.36)$$

的解, 则 $\tilde{u}(x) = u(Rx)$ 满足 Dirichlet 问题 (2.34), 其中用 $\tilde{g}(x) = g(Rx)$ 代替 g . 我们作变量替换得到

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y). \quad (2.37)$$

通常称函数

$$K(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R|x-y|^n} \quad (x \in B(0, R), y \in \partial B(0, R))$$

为 **Poisson 核**, 而称公式 (2.37) 为 **Poisson 公式**. 实际上, 我们利用 Poisson 公式 (2.37) 构造出在球面 $\partial B(0, R)$ 上指定取值的球 $B(0, R)$ 上的调和函数.

以下我们验证公式 (2.37) 的确给出 Dirichlet 问题 (2.36) 的解. 注意公式 (2.37) 中 $u(x)$ 在球面 $\partial B(0, R)$ 上没有定义, 因而在 Dirichlet 问题 (2.36) 中, $u(x)$ 在球面上取边值 $g(x)$ 是在取极限的意义下成立的.

定理 2.20 假设 $B(0, R) \subset \mathbf{R}^n$, $g: \partial B(0, R) \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, 对于任意 $x \in B(0, R)$, 函数 $u(x)$ 由 Poisson 公式 (2.37) 定义, 即

$$u(x) = \int_{\partial B(0,R)} K(x, y)g(y) dS(y),$$

则

- (1) $u(x)$ 是 $B(0, R)$ 上无穷次可微的有界函数;
- (2) $\Delta u(x) = 0$, $x \in B(0, R)$;
- (3) 任给 $x_0 \in \partial B(0, R)$, 当 $x \in B(0, R)$ 且 $x \rightarrow x_0$ 时, $u(x) \rightarrow g(x_0)$.

证明 (1) 对任意 $x \in B(0, R)$, 我们对特殊情形 $u = 1$ 应用公式 (2.27) 得到

$$\int_{\partial B(0,R)} K(x, y) dy = 1.$$

由定理的假设, 存在 $M > 0$, 使得 $|g| \leq M$. 因此公式 (2.37) 定

义的 $u(x)$ 是有界的. 当 $x \neq y$ 时, $K(x, y)$ 是光滑的, 我们易证 $u \in C^\infty(B(0, R))$.

(2) 当 $x \neq y$ 时, $\Delta_x G(x, y) = 0$, 于是 $\Delta_x \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) = 0$. 从而, 当 $x \in B(0, R)$, $y \in \partial B(0, R)$ 时, $\Delta_x K(x, y) = 0$ 且

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B(0,R)} \Delta_x K(x, y)g(y) dS(y) = 0.$$

(3) 固定 $x_0 \in \partial B(0, R)$, $\varepsilon > 0$. 取 $\delta_1 > 0$ 足够小, 使得当 $y \in \partial B(0, R)$ 且 $|y - x_0| \leq \delta_1$ 时,

$$|g(y) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 $x \in B(0, R)$ 且 $|x - x_0| \leq \frac{\delta_1}{2}$ 时, 利用等式 (2.32) 我们计算得

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial B(0,R)} K(x, y)[g(y) - g(x_0)] dS(y) \right| \\ &\leq \int_{\partial B(0,R) \cap \{|y-x_0| \leq \delta_1\}} K(x, y)|g(y) - g(x_0)| dS(y) \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R) \cap \{|y-x_0| > \delta_1\}} K(x, y)|g(y) - g(x_0)| dS(y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M(R^2 - |x|^2)R^{n-2}}{(\delta_1/2)^n}. \end{aligned}$$

取 $\delta > 0$ 足够小, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $R^2 - |x|^2$ 足够小, 于是我们得到

$$|u(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

至此我们完成定理的证明.

附注 2.6 当 $n = 2$ 时, 在公式 (2.37) 中用极坐标表示 $x = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, $y = (R \cos \varphi, R \sin \varphi)$, 记 $u(x) = u(\rho, \theta)$, 则公式

(2.37) 可以表示成

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)} g(\varphi) d\varphi,$$

其中 $g(\varphi) = g(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$. 实际上, 我们在“复变函数”这门课程中学过以上公式.

§ 2.3 极值原理和最大模估计

2.3.1 极值原理

在这一小节我们将讨论比位势方程更一般的方程

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.38)$$

在下面的讨论中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界开集.

当我们考虑方程 (2.38) 的极值原理时, 我们需要假定

$$c(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.39)$$

此条件在极值原理的证明非常重要. 首先我们证明以下一个较强的结论.

定理 2.21 假设 $c(x) \geq 0, f(x) < 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足方程 (2.38), 则 $u(x)$ 不能在 Ω 上达到它在 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值, 即 $u(x)$ 只能在 $\partial\Omega$ 上达到它的非负最大值.

证明 用反证法. 如果 $u(x)$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 达到非负最大值, 即

$$u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \geq 0,$$

则由多元微积分的定理知, $u(x)$ 在 x_0 的梯度向量 $Du(x_0) = 0$ 和 Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 是非正定的. 对 Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 求迹得到

$$\Delta u(x_0) = \text{tr}(D^2u(x_0)) \leq 0,$$

因而

$$\mathcal{L}u(x_0) = -\Delta u(x_0) + c(x_0)u(x_0) = f(x_0) \geq 0.$$

这与定理的假设 $f(x_0) < 0$ 矛盾, 因此 $u(x)$ 不能在 Ω 上达到它的非负最大值.

定理 2.21 的证明思想在位势方程和热方程的极值原理中非常重要. 从本质上来看, 这种证明方法就是利用比较方程两端的符号来导出矛盾. 我们将在后面的内容多次使用此方法.

定理 2.22 假设 $c(x) \geq 0, f(x) \leq 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足方程 (2.38), 则 $u(x)$ 必在 $\partial\Omega$ 上达到它在 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值, 即

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u^+(x),$$

其中 $u^+(x) = \max\{u, 0\}$.

证明 不妨设原点 $0 \in \Omega$. 记 d 为 Ω 的直径. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们构造辅助函数

$$w(x) = u(x) - \varepsilon(d^2 - |x|^2).$$

显然

$$w(x) \leq u(x) \leq w(x) + \varepsilon d^2.$$

计算得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w &= \mathcal{L}u - 2n\varepsilon - c(x)\varepsilon(d^2 - |x|^2) \\ &\leq f - 2n\varepsilon < 0. \end{aligned}$$

由定理 2.21 知, w 的非负最大值只能在 $\partial\Omega$ 上达到, 因此

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} w(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} w^+(x).$$

于是, 我们得到

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} w(x) + \varepsilon d^2 \leq \max_{x \in \partial\Omega} w^+(x) + \varepsilon d^2$$

$$\leq \max_{x \in \partial \Omega} u^+(x) + \varepsilon d^2.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则得到所要证明的结论. 至此我们完成定理的证明.

附注 2.7 在定理 2.21 和定理 2.22 中, 如果 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值是负数, 定理 2.21 和定理 2.22 并没有告诉我们任何结论.

下面我们证明 Hopf 引理. 此引理非常深刻, 在证明强极值原理中很有用.

定理 2.23 (Hopf 引理) 假设 B_R 是 $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) 上的一个以 R 为半径的球, 在 B_R 上 $c(x) \geq 0$ 且有界. 如果 $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$ 满足

$$(1) \mathcal{L}u = -\Delta u + c(x)u \leq 0, \quad x \in B_R;$$

(2) 存在 $x_0 \in \partial B_R$ 使得 $u(x)$ 在 x_0 点达到在 $\bar{B}_R$ 上严格的非负最大值, 即 $u(x_0) = \max_{\bar{B}_R} u(x) \geq 0$, 且当 $x \in B_R$ 时, $u(x) < u(x_0)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} > 0, \quad (2.40)$$

其中 ν 与 ∂B_R 在 x_0 点的单位外法向量 n 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$.

证明 根据引理的假设, $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} \geq 0$ 是显然的, 我们需要证明它严格大于 0. 不妨设 B_R 是以原点为球心, 半径为 R 的球. 在球壳 $B_R^* = \left\{ x \in B_R \mid \frac{R}{2} < |x| < R \right\}$ 上考虑辅助函数

$$w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x),$$

其中 $\varepsilon > 0$ 和 $v(x)$ 待定. 不妨取 $v(x_0) = 0$. 此时 $w(x_0) = 0$. 因而 $w(x)$ 在 $\bar{B}_R^* = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \frac{R}{2} \leq |x| \leq R \right\}$ 上的非负最大值存在. 如果能取到 $\varepsilon > 0$ 和 $v(x)$ 使得 $w(x)$ 在 x_0 点达到非负最大值 $w(x_0)$, 则

$$0 \leq \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} \right),$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0}.$$

为了使 $w(x)$ 在球壳 B_R^* 的边界上达到非负最大值, 由定理 2.22 我们只需要在球壳 B_R^* 上提条件 $\mathcal{L}w \leq 0$. 因此, 我们只需要构造出函数 v , 使它满足条件

$$\mathcal{L}v \leq 0, \quad x \in B_R^*$$

和

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} < 0,$$

就完成定理的证明.

由于球壳 B_R^* 的对称性我们考虑径向对称函数

$$v(x) = |x|^\alpha - R^\alpha,$$

其中 $\alpha < 0$ 待定. 在球壳 B_R^* 上, 计算得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v &= -\alpha(\alpha + n - 2)|x|^{\alpha-2} + c(x)|x|^\alpha - c(x)R^\alpha \\ &\leq [-\alpha(\alpha + n - 2) + CR^2]|x|^{\alpha-2}, \end{aligned}$$

其中 $C = \sup_{B_R^*} c(x)$. 取 $\alpha < 0$ 足够小, 我们得到 $\mathcal{L}v \leq 0$, 从而在球壳 B_R^* 上

$$\mathcal{L}w \leq 0.$$

所以, 由定理 2.22 知, $w(x)$ 在球壳 B_R^* 的边界 ∂B_R^* 达到非负最大值. 在球壳的内球面 $\partial B_R^* \cap B_R = \partial B_{\frac{R}{2}}$ 上,

$$\max_{|x|=\frac{R}{2}} (u(x) - u(x_0)) \stackrel{\text{记为}}{=} \beta < 0.$$

取 $\varepsilon > 0$ 足够小, 使得

$$w|_{\partial B_{\frac{R}{2}}} \leq \beta + \varepsilon R^\alpha (2^{-\alpha} - 1) < 0,$$

而在球壳的外球面 $\partial B_R^* \cap \partial B_R = \partial B_R$ 上, $v(x) = 0$, 显然 $w(x) \leq 0$, $w(x_0) = 0$, 所以 $w(x)$ 在 x_0 点达到非负最大值. 由于在 ∂B_R 上 $v(x) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} &\geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=x_0} \cos(\nu, \mathbf{n}) \\ &= -\varepsilon \alpha R^{\alpha-1} \cos(\nu, \mathbf{n}). \end{aligned}$$

由于 α 是负数, ν 和 $\mathbf{n}$ 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x_0} > 0.$$

至此我们完成引理的证明.

附注 2.8 如果 $c(x) \equiv 0$, 则证明中的 $v(x)$ 可取为 Laplace 方程的基本解.

附注 2.9 另外我们可取 $v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-aR^2}$, 其中 $a > 0$ 足够大.

由定理 2.23 (Hopf 引理) 我们容易证明下面的强极值原理.

定理 2.24 (强极值原理) 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界连通开集, $c(x) \geq 0$ 且有界. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 在 Ω 上满足 $\mathcal{L}u \leq 0$, 且 $u(x)$ 在 Ω 内达到其在 $\bar{\Omega}$ 上的非负最大值, 则 u 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数.

证明 记

$$M = \max_{\bar{\Omega}} u(x).$$

考虑集合 $O = \{x \in \Omega | u(x) = M\}$. 我们只要证明 O 相对于 Ω 既开又闭, 进而由 Ω 的连通性知, O 是空集或 Ω . 又由定理的假设知, O 非空, 从而 $O = \Omega$. 这就是要证的结论.

由于函数 $u(x)$ 的连续性, O 相对于 Ω 显然是闭的. 现在我们证明 O 相对于 Ω 是开的. 设 x_0 是 O 上任意一点, 则存在球 $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. 如果 x_0 不是 O 的内点, 则存在 $\tilde{x} \in (\Omega \setminus O) \cap B(x_0, r)$. 记

$$d = \text{dist}\{\tilde{x}, \bar{O}\} = \min\{|x - \tilde{x}| : x \in \bar{O}\}.$$

显然 $d \leq r$, 因此 $B(\tilde{x}, d) \subset B(x_0, 2r) \subset \Omega$,

$$u(x) < M, \quad x \in B(\tilde{x}, d).$$

记 $y_0 \in \partial B(\tilde{x}, d) \cap O$, 则 $u(y_0) = M$. 由于 y_0 是函数 $u(x)$ 的极值点, 因此

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{x=y_0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

而在球 $B(\tilde{x}, d)$ 上应用定理 2.23, 至少存在一个方向 ν 使得

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=y_0} > 0.$$

这就导致矛盾. 因而我们证明了 x_0 是 O 的内点. 从而 O 相对于 Ω 是开的. 定理证毕.

2.3.2 最大模估计

在这一小节中我们研究位势方程的第一边值问题和第三边值问题的最大模估计. 由于最大模估计蕴涵着问题的解的惟一性和稳定性, 因而证明这些问题是适定的.

首先我们考虑位势方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases} \quad (2.41)$$

利用极值原理我们可以得到下面的最大模估计.

定理 2.25 假设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题 (2.41) 的解, 则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq G + CF,$$

其中 $G = \max_{\partial\Omega} |g(x)|$, $F = \sup_{\Omega} |f(x)|$, C 是一个仅依赖于维数 n 以及

Ω 的直径 $d = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ 的常数.

证明 不妨假设 Ω 包含原点 $x = 0$. 令 $w(x) = u(x) - z(x)$, 其中

$$z(x) = G + \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2).$$

容易验证

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f(x) - F \leq 0, \quad x \in \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} &\leq g - G \leq 0. \end{aligned}$$

由极值原理, 在 Ω 上 $w(x) \leq 0$. 从而

$$u(x) \leq z(x) \leq G + \frac{d^2}{2n}F, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

同理考虑 $-u(x)$ 满足的问题得到

$$u(x) \geq -z(x) \geq -G - \frac{d^2}{2n}F, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

因此

$$|u(x)| \leq z(x) \leq G + \frac{d^2}{2n}F, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

两边取上确界, 定理即得证.

在 Ω 上考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u \right] \Big|_{\partial\Omega} = g(x), \end{cases} \quad (2.42)$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 如果 $\alpha(x) \equiv 0$, 则问题 (2.42) 称为 Neumann 问题或**第二边值问题**; 如果 $\alpha(x) > 0$, 则问题 (2.42) 称为**第三边值问题**. 注意到当 $\alpha(x) \equiv 0, c(x) \equiv 0$ 时, 齐次 Neumann 问题 (2.42) ($f(x) \equiv 0, g(x) \equiv 0$) 有非零解 $u(x) \equiv 1$, 因此最大模估计在此情形不成立. 但对于第三边值问题, 利用极值原理我们可以得到下面的最大模估计.

定理 2.26 假设 $c(x) \geq 0, \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是问题 (2.42) 的解, 则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq C(G + F),$$

其中 $G = \max_{\partial\Omega} |g(x)|, F = \sup_{\Omega} |f(x)|, C$ 是仅依赖于维数 n, α_0 和 Ω 的直径 d 的常数.

证明 不妨假设 Ω 包含原点 $x = 0$. 令 $w(x) = u(x) - z(x)$, 其中

$$z(x) = \frac{G}{\alpha_0} + \frac{F}{2n} \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2 \right).$$

容易验证, 在 Ω 上,

$$-\Delta z + c(x)z \geq F;$$

在 $\partial\Omega$ 上,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)z &= \alpha(x) \frac{G}{\alpha_0} + \frac{F}{2n} \left[-2x \cdot \mathbf{n} + \alpha(x) \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 - |x|^2 \right) \right] \\ &\geq G + \frac{F}{2n} (-|x|^2 - 1 + 1 + d^2) \geq G. \end{aligned}$$

因此, 当 $x \in \Omega$ 时,

$$-\Delta w(x) + c(x)w(x) \leq f(x) - F \leq 0;$$

当 $x \in \partial\Omega$ 时,

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)w(x) \leq g(x) - G \leq 0.$$

由极值原理, 我们知道 $w(x)$ 的正的最大值一定在边界 $\partial\Omega$ 上达到. 设在点 $x_0 \in \partial\Omega$ 处达到最大值. 由于 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 于是 $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=x_0} \geq 0$, 从而

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=x_0} + \alpha(x_0)w(x_0) \geq \alpha(x_0)w(x_0) > 0.$$

这与上式矛盾. 这说明当 $x \in \bar{\Omega}$ 时, $w(x) \leq 0$. 所以

$$u(x) \leq z(x) \leq C(G + F), \quad x \in \bar{\Omega},$$

其中

$$C = \max \left\{ \frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{2n} \left(\frac{1+d^2}{\alpha_0} + d^2 \right) \right\}.$$

考虑 $w(x) = u(x) + z(x)$ 我们得到另一方向的不等式. 因此

$$|u(x)| \leq z(x) \leq C(G+F), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

两边取上确界, 定理即证.

实际上, 定理 2.25 和定理 2.26 的最大模估计蕴涵着第一边值问题 (2.41) 和第三边值问题 (2.42) 的解的惟一性和稳定性. 我们仅考虑下列较为复杂的第三边值问题.

定理 2.27 假设 $u_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$) 满足第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_i + c_i(x)u_i = f_i(x), & x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_i(x)u_i \right] \Big|_{\partial\Omega} = g_i(x), \end{cases}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 如果 $c_i(x) \geq 0$ 且有界, $\alpha_i(x) \geq \alpha_0 > 0$, 则估计

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| &\leq C(\max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| + \sup_{\Omega} |f_1 - f_2| \\ &\quad + \max_{\partial\Omega} |\alpha_1 - \alpha_2| + \sup_{\Omega} |c_1 - c_2|) \end{aligned} \quad (2.43)$$

成立, 其中 C 是仅依赖于维数 n , α_0 , Ω 的直径 d 和 G_1, G_2, F_1, F_2 的常数, 这里 $G_i = \sup_{x \in \partial\Omega} |g_i(x)|$, $F_i = \sup_{\Omega} |f_i(x)|$, $i = 1, 2$.

证明 由定理 2.26 我们有

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_i| \leq C_1(G_i + F_i), \quad i = 1, 2. \quad (2.44)$$

设 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足边值问题

$$\begin{cases} -\Delta w + c_1(x)w = f_1 - f_2 + (c_2 - c_1)u_2, & x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_1(x)w \right] \Big|_{\partial\Omega} = g_1 - g_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)u_2. \end{cases}$$

于是, 由定理 2.26 有

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} |w| &\leq C_1(\max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| + \max_{\partial\Omega} |(\alpha_2 - \alpha_1)u_2| \\ &\quad + \sup_{\Omega} |f_1 - f_2| + \sup_{\Omega} |(c_1 - c_2)u_2|) \\ &\leq C_1(\max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| + \max_{\partial\Omega} |\alpha_2 - \alpha_1| \max_{\bar{\Omega}} |u_2| \\ &\quad + \sup_{\Omega} |f_1 - f_2| + \sup_{\Omega} |c_1 - c_2| \max_{\bar{\Omega}} |u_2|). \end{aligned}$$

由不等式 (2.44) 我们得到估计 (2.43).

§ 2.4 能量模估计

首先考虑 n 维位势方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

利用 Gauss-Green 公式我们可以得到下面的能量模估计.

定理 2.28 假设 $c(x) \geq c_0 > 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题 (2.45) 的解, 则

$$\int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq M \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx,$$

其中 M 是仅依赖于 c_0 的常数.

证明 在 Dirichlet 问题 (2.45) 的方程两端同乘 u , 再在 Ω 上积分得到

$$-\int_{\Omega} u \Delta u dx + \int_{\Omega} c(x)u^2 dx = \int_{\Omega} f u dx.$$

对于上式左端第一项应用 Gauss-Green 公式, 右端应用 Cauchy 不等式

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0,$$

则

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx + c_0 \int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2c_0} \int_{\Omega} f^2 dx.$$

上式移项即得证.

引理 2.29 (Friedrichs 不等式) 假设 $u \in C_0^1(\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 4d^2 \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx, \quad (2.46)$$

其中 d 是 Ω 的直径.

证明 由于 Ω 的直径为 d , 则可以做一个边长为 $2d$ 且平行于坐标轴的 n 维正方体将 Ω 包含于其中. 不妨设此正方体为

$$Q = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | 0 \leq x_i \leq 2d, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

令

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & x \in \Omega, \\ 0, & x \in Q \setminus \Omega, \end{cases}$$

则显然 $\tilde{u} \in C_0^1(Q)$ 且

$$\tilde{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} \tilde{u}_{\xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi.$$

利用 Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned} \tilde{u}^2(x) &\leq x_1 \int_0^{x_1} |\tilde{u}_{\xi}(\xi, x_2, \dots, x_n)|^2 d\xi \\ &\leq 2d \int_0^{2d} |\tilde{u}_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1. \end{aligned}$$

两端对 x 在 Q 上积分, 则

$$\int_Q \tilde{u}^2(x) dx \leq 4d^2 \int_Q |\tilde{u}_{x_1}|^2 dx \leq 4d^2 \int_Q |D\tilde{u}|^2 dx.$$

注意到 $\tilde{u}$ 的定义, 我们得到不等式 (2.46).

利用上述不等式, 我们可以证明下面结论.

定理 2.30 假设 $c(x) \geq 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是问题 (2.45) 的解, 则

$$\int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq M \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx,$$

其中 M 是仅依赖于 Ω 的直径的常数.

下面考虑位势方程的第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u \right] \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

同样利用 Gauss-Green 公式我们可以得到下面的能量模估计.

定理 2.31 假设 $c(x) \geq c_0 > 0$, $\alpha(x) \geq 0$. 如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是第三边值问题 (2.47) 的解, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u^2(x) dS(x) \\ \leq M \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

其中 M 是仅依赖于 c_0 的常数.

证明留作练习.

§2.5 习 题

1. 利用推导 Laplace 方程的思想推导极小曲面方程.
2. 构造 $\mathbf{R}^n$ 上所有二次调和多项式组成的线性空间.
3. 证明定理 2.1.
4. 仿照平均值公式的推导证明: 当 $n \geq 3$ 时, 对于第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B(0, r), \\ u = g, & x \in \partial B(0, r) \end{cases}$$

在 $C^2(B(0, r)) \cap C^1(\bar{B}(0, r))$ 上的解 $u(x)$, 成立

$$u(0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0, r)} g(x) dS(x) \\ + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0, r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f(x) dx.$$

5. 仿照平均值公式的推导证明: 当 $n=2$ 时, 对于第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B(0, r), \\ u = g, & x \in \partial B(0, r) = C(0, r) \end{cases}$$

在 $C^2(B(0, r)) \cap C^1(\bar{B}(0, r))$ 的解 $u(x)$, 成立

$$u(0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C(0, r)} g(x) dl \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{B(0, r)} (\ln r - \ln |x|) f(x) dx,$$

其中 dl 为弧长微分. 此时 $C(0, r)$ 是环绕圆盘 $B(0, r)$ 的圆周.

6. 若 $v \in C^2(\Omega)$ 满足

$$-\Delta v \leq 0, \quad x \in \Omega,$$

则称 v 在 Ω 上是下调和的.

(1) 证明: 对于任意球 $B(x, r) \subset \Omega$, 成立

$$v(x) \leq \int_{B(x, r)} v(y) dy.$$

(2) 证明: $\max_{\Omega} v(x) = \max_{\partial\Omega} v(x)$.

(3) 设 $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是光滑凸函数, 且 u 是 Ω 上的调和函数. 证明: $v = \phi(u)$ 是 Ω 上的下调和函数.

(4) 设 u 是 Ω 上的调和函数. 证明: $v = |Du|^2$ 是 Ω 上的下调和函数.

7. (Harnack 定理) 假设 $\{u_n\} \subset C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数列. 如果 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛, 则 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛, 且收敛于一个调和函数. (提示: 利用极值原理和平均值公式)

8. (Schwarz 反射定理) 记上半球

$$B^+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B(0, 1) | x_n > 0\},$$

假设 u 是上半球 B^+ 上的调和函数且在边界 $\{x \in \partial B^+ | x_n = 0\}$ 上满足 $u = 0$. 令

$$v(x) = \begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n), & x_n \geq 0, \\ -u(x_1, x_2, \dots, -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

证明: v 是球 $B(0, 1)$ 上的调和函数. (提示: 利用平均值公式的推论)

9. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集. 如果原点 $0 \notin \Omega$, 我们记 $x^* = \frac{x}{|x|^2}$,

$\Omega^* = \{x^* | x \in \Omega\}$. 假设 u 是在 Ω 上的一个函数, 并定义 Ω^* 上的函数 $K[u](x) = |x|^{2-n} u(x^*)$, $x \in \Omega^*$ 为函数 u 的 Kelvin 变换. 证明: $u(x)$ 是 Ω 上的调和函数当且仅当 $K[u]$ 是 Ω^* 上的调和函数.

10. 设 $u(x)$ 是球 $B(0, R)$ 上的调和函数, 且在 $\bar{B}(0, R)$ 上连续. 又设

$$M = \int_{B(0, R)} u^2(x) dx.$$

试证:

$$(1) |u(0)| \leq \left[\frac{M}{\alpha(n)R^n} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$(2) |u(x)| \leq \left[\frac{M}{\alpha(n)(R - |x|)^n} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

11. 设 $u(x)$ 是单位球 $B = B(0, 1)$ 上的有界调和函数. 证明:

$$\sup_{x \in B} (1 - |x|) |Du(x)| < +\infty.$$

(提示: 利用定理 2.7 的第一步证明)

12. 设 $u(x)$ 是球 $B(0, R_0)$ 上的调和函数, 对于 $R \in (0, R_0]$ 记

$$\omega(R) = \sup_{B(0, R)} u - \inf_{B(0, R)} u.$$

(1) 利用 Harnack 不等式证明: 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得

$$\omega\left(\frac{R}{2}\right) \leq \eta \omega(R);$$

(提示: 对调和函数 $w(x) = u(x) - \inf_{B(0, R)} u$ 在球 $B\left(0, \frac{R}{2}\right)$ 上利用 Harnack 不等式)

(2) 如果 $\sup_{B(0, R_0)} |u(x)| \leq M_0$, 则存在常数 $\alpha \in (0, 1)$, $C > 0$, 使得

$$\omega(R) \leq C(M_0 + 1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha, \quad R \in (0, R_0].$$

(提示: 对任意 $R \in (0, R_0)$, 一定存在一个正整数 $i \geq 1$, 使得 $\frac{R_0}{2^i} \leq R < \frac{R_0}{2^{i-1}}$)

13. (推广的 Liouville 定理) 假设 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上的调和函数, 且

$$|u(x)| \leq C_1 |x|^m + C_2, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

其中 m 是非负整数, C_1, C_2 是非负常数, 则 u 必为一个次数至多为 m 的调和多项式. (提示: 只要证明 $D^{m+1}u(x) \equiv 0$)

14. 假设 $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$. 对于 $r > 0$, 定义

$$u_r(x) = \frac{1}{N\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y).$$

证明:

$$\Delta u_r = (\Delta u)_r.$$

15. 假设 u 是 $B(0, R)$ 上的非负调和函数.

(1) 利用 Poisson 公式 (2.37) 证明:

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0);$$

(2) 证明定理 2.4'.

16. 利用上述不等式证明定理 2.8'.

17. 证明: 对于任意 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^n$, Poisson 核满足

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x, y) dy = 1,$$

其中

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0) \in \partial \mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1},$$

$$dy = dy_1 dy_2 \cdots dy_{n-1}, \quad K(x, y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)|y - x|^n}.$$

18. 求边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases}$$

的 Green 函数, 其中

(1) Ω 是上半平面;

(2) Ω 是第一象限;

(3) Ω 是带形区域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \in \mathbf{R}, 0 < y < l\}$, 其中 l 为正常数.

19. 记 $B^+(R) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_n > 0, |x| < R\}$ ($n \geq 2$). 求边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in B^+(R), \\ u|_{\partial B^+(R)} = g(x) \end{cases}$$

的 Green 函数. (提示: 分别考虑 $n = 2$ 和 $n \geq 3$ 两种情形)

20. 证明: 第二边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in B(0, R), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = g(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

的解在边值 $g(\theta)$ 满足条件 $\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0$ 时可以表示成

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) \ln [R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\tau - \theta)] d\tau + C,$$

其中 C 为任意常数. 这里 (r, θ) 是点 (x, y) 的极坐标.

21. 假设 $u(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的一个解.

(1) 如果 $c(x) \geq c_0 > 0$, 则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \frac{1}{c_0} \sup_{\Omega} |f(x)|;$$

(2) 如果 $c(x) \geq 0$, 则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq M \sup_{\Omega} |f(x)|,$$

其中 M 依赖于 Ω 的直径 d ; (提示: 不妨设原点 $0 \in \Omega$, 并令 $u(x) = w(x)v(x) = (d^2 - |x|^2 + 1)v(x)$, 然后考虑 $v(x)$ 满足的方程, 利用 (1) 的证明方法可得 $v(x)$ 的最大模估计, 从而得到 $u(x)$ 的最大模估计)

(3) 如果 $c(x) < 0$, 试举反例说明上述最大模估计一般不成立.

22. 假设 $u(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的一个解. 试证明: 对于任意 $x_0 \in \Omega$, 估计

$$\frac{1}{2n} \min_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2 \leq u(x_0) \leq \frac{1}{2n} \max_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2$$

成立, 这里 n 是空间的维数.

23. 假设 $u(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u \right] \Big|_{\Gamma_1} = g_1, & u|_{\Gamma_2} = g_2 \end{cases}$$

的一个解, 其中 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_2 \neq \emptyset$.

(1) 如果 $c(x) \geq c_0 > 0$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, 则有估计

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \max \left\{ \frac{1}{c_0} \sup_{\Omega} |f(x)|, \frac{1}{\alpha_0} \max_{\Gamma_1} |g_1|, \max_{\Gamma_2} |g_2| \right\}.$$

(2) 如果 $c(x) \geq 0$, $\alpha(x) \geq 0$, 且 Γ_1 满足内球条件, 则上述问题的解是惟一的. 这里 Γ_1 满足内球条件是指对于任意 $x_0 \in \Gamma_1$, 存在一个球 B 使得 $B \subset \Omega$, $\Gamma_1 \cap \partial B = \{x_0\}$. (提示: 令 $u(x) = w(x)v(x)$, 其中 $w(x)$ 是待定的辅助函数. 在球 B 上我们考虑 $v(x)$ 满足的问题)

24. 试用辅助函数

$$w(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-aR^2}$$

证明 Hopf 引理, 这里 $a > 0$, R 是球 B_R 的半径.

25. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $u_i(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$) 满足定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u_i + c_i(x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u = g_i, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

如果 $c_2(x) \geq c_1(x) \geq 0$, $g_1(x) \geq g_2(x) \geq 0$, 则

$$u_1(x) \geq u_2(x).$$

(提示: 先证明 $u_i(x) \geq 0$, 然后考虑 $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 满足的定解问题)

26. 假设 $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界区域, $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_0$. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是外部问题

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x), & x \in \partial\Omega, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = l \end{cases}$$

的一个解, 其中 $c(x) \geq 0$ 且在 $\bar{\Omega}$ 上局部有界, 则

$$\sup_{\Omega} |u(x)| \leq \max\{|l|, \max_{\partial\Omega} |g(x)|\}.$$

(提示: 先在区域 $B(0, R) \setminus \Omega_0$ 上证明关于 $u(x)$ 的估计, 然后令 $R \rightarrow +\infty$)

27. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的一个解, 则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \max \left\{ \max_{\partial\Omega} |g(x)|, \sup_{\Omega} |f|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

28. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 - u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的一个解. 证明: 如果 $\max_{\partial\Omega} |g(x)| \leq 1$, 则 $\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq 1$.

29. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $u_i(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$) 满足定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u_i + u_i^3 = f_i(x), & x \in \Omega, \\ u_i = g_i(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

如果 $f_1(x) \geq f_2(x)$, $g_1(x) \geq g_2(x)$, 则

$$u_1(x) \geq u_2(x).$$

(提示: 考虑 $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 满足的定解问题)

30. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathbf{A} \cdot Du = f(x), & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个有界连续向量函数. 如果 $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, 则

$$u(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

(提示: 不妨设原点 $0 \in \Omega$. 考虑 $w(x) = u(x) + \varepsilon(e^{Mx_1} - e^{Mx_1})$ 满足的定解问题, 其中 $M = \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{A}(x)| + 1$, d 为 Ω 的直径)

31. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $u_i(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$) 满足定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u_i + |Du_i|^2 = f_i(x), & x \in \Omega, \\ u_i = g_i(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

如果 $f_1(x) \geq f_2(x)$, $g_1(x) \geq g_2(x)$, 则

$$u_1(x) \geq u_2(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

(提示: 考虑 $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 满足的定解问题)

32. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^r u = f, & x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u \right] \Big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的一个解, 其中 $r > 0$ 和 $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, 则

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq \max \left\{ \frac{1}{\alpha_0} \max_{\partial\Omega} |g(x)|, \sup_{\Omega} |f|^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}.$$

33. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集. 如果 $u(x), v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足方程组

$$\begin{cases} -\Delta u + 2u - v = f, & x \in \Omega, \\ -\Delta v + 2v - u = g, & x \in \Omega \end{cases}$$

和边界条件

$$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0.$$

证明:

$$\max\{\max_{\Omega} |u(x)|, \max_{\Omega} |v(x)|\} \leq \max\{\sup_{\Omega} |f(x)|, \sup_{\Omega} |g(x)|\}.$$

34. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $x_0 \in \partial\Omega$. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega \setminus \{x_0\}} = g, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |u(x)| \leq M_0, \end{cases}$$

则

$$\sup_{\Omega} |u(x)| \leq \max\{M_0, \sup_{\partial\Omega \setminus \{x_0\}} |g(x)|\}.$$

35. 记 $B^+ = \{(x, y) | |x|^2 + y^2 < 1, x \in \mathbf{R}^{n-1}, y > 0\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的上半球. 假设 $u(x, y) \in C^2(B^+) \cap C(\bar{B}^+)$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta_x u - y u_{yy} + c(x, y)u = f(x, y), & (x, y) \in B^+, \\ u|_{\partial B^+} = g \end{cases}$$

的一个解.

(1) 如果 $c(x, y) \geq c_0 > 0$, 则有估计

$$\max_{\bar{B}^+} |u(x)| \leq \max\{c_0^{-1} \sup_{B^+} |f(x, y)|, \max_{\partial B^+} |g(x, y)|\};$$

(2) 如果 $c(x, y) \geq 0$, 则

$$\max_{\bar{B}^+} |u(x, y)| \leq M[\sup_{B^+} |f(x, y)| + \max_{\partial B^+} |g(x, y)|],$$

其中 $M > 0$ 是一常数. (提示: 令 $u(x, y) = w(x)v(x, y)$, 其中 $w(x)$ 是待定的辅助函数. 在上半球 B^+ 上考虑 $v(x, y)$ 满足的问题, 利用 (1) 的结论)

36. 记 $\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y > 0\}$. 证明: 定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u|_{y=0} = g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

属于 $C^2(\mathbf{R}_+^2) \cap C(\bar{\mathbf{R}}_+^2)$ 的有界解是惟一的. (提示: 考虑辅助函数 $w(x, y) = \varepsilon \ln[x^2 + (y+1)^2] \pm u(x, y)$, 其中 ε 是任意正常数)

37. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) 是一个有界开集, $x_0 \in \partial\Omega$. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega \setminus \{x_0\}} = g \end{cases}$$

的有界解. 证明这样的解是惟一的. (提示: 考虑辅助函数 $w(x) =$

$$\frac{\varepsilon}{|x - x_0|^{n-2}} \pm u(x), \text{ 其中 } d \text{ 是 } \Omega \text{ 的直径, } \varepsilon \text{ 是任意正常数})$$

38. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是一个有界区域, $x_0 \in \partial\Omega$. 如果 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega \setminus \{x_0\}} = g \end{cases}$$

的有界解. 证明这样的解是惟一的. (提示: 考虑辅助函数 $w(x) =$

$$\varepsilon \ln\left(\frac{d}{|x - x_0|}\right) \pm u(x), \text{ 其中 } d \text{ 是 } \Omega \text{ 的直径, } \varepsilon \text{ 是任意正常数})$$

39. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) 是一个有界开集, $x_0 \in \Omega$. 又设 $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的解, $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\})$ 是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的有界解. 证明: x_0 是 $v(x)$ 的可去奇点, 即

$$u(x) \equiv v(x), \quad x \in \bar{\Omega} \setminus \{x_0\}.$$

(提示: 当 $n \geq 3$ 时, 考虑辅助函数 $w(x) = \frac{\varepsilon}{|x - x_0|^{n-2}} \pm [u(x) - v(x)]$, 其中 ε 是任意正常数. 当 $n = 2$ 时, 考虑辅助函数 $w(x) = -\varepsilon \ln |x - x_0| \pm [u(x) - v(x)]$)

40. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) 是一个有界开集. 考虑定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \mathbf{A}(x) \cdot Du(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

其中 n 维向量函数 $\mathbf{A}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和函数 $c(x)$ 在 Ω 上连续有界. 如果条件 $c(x) - \frac{1}{4}|\mathbf{A}(x)|^2 > 0$ 成立, 利用能量估计方法证明上述问题解的惟一性.

41. 假设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) 是一个有界开集, 且在 Ω 上 $c(x) \geq 0$, 试利用能量估计方法证明 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

在函数类 $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 中的解在相差一个常数的意义下惟一.

第三章 热 方 程

本章讨论热方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f, \quad (3.1)$$

其中 $u = u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, $t > 0$; $a > 0$ 是常数, $f = f(x, t)$ 是已知函数.

在此章第一节中, 我们将首先从 Fourier 级数诱导出 Fourier 变换和 Fourier 积分, 讨论 Fourier 变换和 Fourier 积分的性质; 然后我们利用 Fourier 变换和 Fourier 积分求解出一维和多维热方程的 Cauchy 初值问题的解的表达式——Poisson 公式, 从而得到热方程初值问题的解的存在性, 并由此导出热方程的基本解. 在第二节中, 我们介绍分离变量法的理论基础——特征值问题, 并利用分离变量法来解出一维热方程混合问题的解的表达式, 从而得到一维热方程混合问题的解的存在性, 同时由此导出热方程的 Green 函数. 在第三节中, 我们利用在位势方程这一章中应用的方法, 推导出关于热方程混合问题和初值问题的各种极值原理和最大模估计; 然后我们介绍一个重要的 Gronwall 不等式, 并以此推导出热方程的混合问题的能量模估计, 从而解决相应的解的惟一性问题和稳定性问题; 最后我们讨论热方程反问题的解的惟一性和此类问题的不适定性.

热方程的解的性质与位势方程的解的性质有很大的相似性. 对于大多数关于位势方程的定理也有关于热方程的相应定理成立. 当然, 相对于位势方程来说, 关于热方程的定理和证明通常要复杂一些, 毕竟热方程中多了一个变量和关于这个变量的一阶的偏导数. 另外, 从尺度变换的观点来看, 热方程中空间变量和时间变量不是各向同性的, 因此热方程的解在空间方向和时间方向上的性质有一定的差异. 这在以下的讨论中将得到进一步的阐述.

热方程是偏微分方程中另一类重要的方程, 可以从许多具有物理意义的数学模型中得到. 在此我们简略地推导一下.

设 $u = u(x, t)$ 表示某一均匀物体 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 在位置 x , 时刻 t 的温度 (单位: K); c 表示比热 (单位: J/(kg·K)), ρ 表示密度 (单位: kg/m³). 令 V 为 Ω 内的任何光滑区域, $\mathbf{q}$ 表示温度场的热流密度 (单位: W/m²) 且 $f_0 = f_0(x, t)$ 表示在位置 x , 时刻 t 产生的热量密度. 由能量守恒定律我们得到

$$\frac{d}{dt} \int_V c\rho u \, dx + \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS(x) = \int_V \rho f_0 \, dx,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 ∂V 的单位外法向量. 利用 Gauss-Green 公式我们知

$$c\rho \int_V u_t \, dx + \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} \, dx = \int_V \rho f_0 \, dx.$$

由于区域 V 的任意性, 我们有

$$c\rho u_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = \rho f_0. \quad (3.2)$$

由 Fourier 热传导定律 (温度场中热流密度与温度梯度成正比, 而且热量总是从高温处流向低温处)

$$\mathbf{q} = -k \nabla u, \quad (3.3)$$

其中 $k > 0$ 是物体的导热系数, 我们把等式 (3.3) 代入等式 (3.2) 得到热方程

$$u_t - a^2 \Delta u = f,$$

$$\text{这里 } a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}, \quad f = \frac{f_0}{c}.$$

附注 3.1 如果 u 表示物质在位置 x , 时刻 t 的浓度, 则方程 (3.1) 称为 **反应扩散方程**. 在推导过程中只需把 Fourier 热传导定律换为 Fick 扩散定律. 此时 $f(x, t)$ 表示在位置 x , 时刻 t 产生的物质的密度, 也称为 **反应项**, 而 $-a^2 \Delta u$ 表示在位置 x , 时刻 t 物质的扩散强度, 也称为 **扩散项**.

解一个用偏微分方程描述的实际问题, 一般来说只知道方程是不够的. 因此我们还需要提适当的附加条件. 本章中为了求解方程 (3.1), 我们需要适当的初始条件和边值条件. 初始条件和边值条件也称为 **定解条件**. 一个偏微分方程和相应的定解条件组成一个 **定解问题**. 回到上述具体问题, 为了确定物体内部的温度分布, 我们还需要知道物体内部的初始温度分布以及物体通过它的边界所受周围介质的影响. 故对于上述具体问题的定解条件如下:

初始条件 给出物体内部的各点在初始时刻 $t = 0$ 的温度分布

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

其中 $\varphi(x)$ 是已知函数.

边值条件 给出物体边界 $\partial\Omega$ 在时间 $t > 0$ 的温度分布或受周围介质的影响情况, 通常有以下三类:

(1) 已知边界 $\partial\Omega$ 的温度分布

$$u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

当 g 为常数时, 表示物体的边界保持 **恒温**.

(2) 已知通过物体的边界 $\partial\Omega$ 流入或流出物体 Ω 的热量

$$k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 当 $g \geq 0$ 时表示热量流入, 当 $g \leq 0$ 时表示热量流出. 特别地, 当 $g \equiv 0$ 时, 表示物体 **绝热**.

(3) 已知通过物体的边界 $\partial\Omega$ 与周围介质的热交换强度

$$k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x, t) = \alpha_0(x, t)(g_0(x, t) - u(x, t)), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x, t) + \alpha(x, t)u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, g_0 表示周围介质的温度, $\alpha_0 > 0$ 表

示热交换系数, $\alpha = \frac{\alpha_0}{k} > 0, g = \frac{g_0}{k}$.

在以下章节中, 我们用 $C^{2,1}(Q)$ 表示所有在 Q 内关于 x 二阶偏导数连续, 关于 t 一阶偏导数连续的函数构成的函数集, 即

$$C^{2,1}(Q) = \{u \in C(Q) | u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C(Q); i, j = 1, \dots, n\}.$$

热方程 (3.1) 在函数集 $C^{2,1}(Q)$ 中的解通常称为它的**古典解**. 同时我们用 $C^{1,0}(Q)$ 表示所有在 Q 内函数本身连续且关于 x 一阶偏导数连续的函数构成的函数集, 即

$$C^{1,0}(Q) = \{u \in C(Q) | u_{x_i} \in C(Q); i = 1, \dots, n\}.$$

§ 3.1 初值问题

我们将在这一节中求解一维热方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.4)$$

多维热方程初值问题的求解完全类似. 在求解一维热方程初值问题 (3.4) 之前我们先介绍 Fourier 变换和 Fourier 积分.

3.1.1 Fourier 变换和 Fourier 积分

Fourier 积分实际上是 Fourier 级数的一种极限形式. 从 Fourier 级数, 我们可以从形式上诱导出 Fourier 积分.

设 $f(x) \in C^1(\mathbf{R})$. 对任意 $l > 0$, $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 可以展开为 Fourier 级数, 且对 $x \in (-l, l)$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right),$$

其中系数

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} \xi \, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi \, d\xi, \quad k = 1, 2, \dots.$$

我们将系数 a_k, b_k 的表达式代入上式, 并利用三角函数和差化积公式得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \, d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} (x - \xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \, d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \lambda_k \int_{-l}^l f(\xi) \cos \lambda_k (x - \xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

这里

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \Delta \lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi}{l}.$$

设极限

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l |f(\xi)| \, d\xi$$

存在, 则当 $l \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \, d\xi \rightarrow 0,$$

且形式上

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \lambda_k \int_{-l}^l f(\xi) \cos \lambda_k (x - \xi) \, d\xi \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

因而我们可以猜测

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) \, d\xi.$$

将余弦函数写成复数形式

$$\cos \lambda(x-\xi) = \frac{1}{2}[e^{i\lambda(x-\xi)} + e^{-i\lambda(x-\xi)}],$$

我们得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda(x-\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^0 d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

不难看出上式可以写成

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{i\lambda x} d\lambda.$$

由此我们引入如下定义.

定义 3.1 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则无穷积分

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (3.5)$$

有意义, 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**, 记为 $(f(x))^\wedge = \hat{f}(\lambda)$.

实际上, 我们可以证明上述形式上得到的公式在一定条件下是正确的.

定理 3.1 (Fourier 积分定理) 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$, 则对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 成立

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = f(x). \quad (3.6)$$

公式 (3.6) 称为 **反演公式**, 其左端的积分表示在 Cauchy 主值意义下的无穷积分, 通常称为 **Fourier 逆变换**, 记为 $(\hat{f}(\lambda))^\vee$. 因此 Fourier 积分定理也可写成

$$(\hat{f})^\vee = f.$$

也就是说, $L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ 中的函数作一次 Fourier 变换后, 再作一次 Fourier 逆变换, 又回到函数本身.

在证明 Fourier 积分定理之前, 我们先回顾以下的结论.

定理 3.2 (Riemann-Lebesgue 引理) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0. \quad (3.7)$$

另外, 从复变函数我们知道如下有用的等式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (3.8)$$

我们将利用以上事实来证明 Fourier 积分定理.

定理 3.1 的证明 由于 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$, 无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

一致收敛, 且是 λ 的连续函数. 固定 $x \in \mathbf{R}$, 我们利用上述无穷积分的一致收敛性, 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-N}^N e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\eta) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta. \end{aligned}$$

设 M 是一个待定正数. 我们记

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-M} f(x+\eta) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M f(x+\eta) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_M^{+\infty} f(x+\eta) \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta,$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = I_1 + I_2 + I_3.$$

由正弦函数的有界性我们估计 I_1 和 I_3 得到

$$|I_1| + |I_3| \leq \frac{1}{\pi M} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\eta)| d\eta.$$

接着我们估计 I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M \frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta} \sin N\eta d\eta + \frac{f(x)}{\pi} \int_{-M}^M \frac{\sin N\eta}{\eta} d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M g(x, \eta) \sin N\eta d\eta + \frac{f(x)}{\pi} \int_{-MN}^{MN} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta, \end{aligned}$$

其中

$$g(x, \eta) = \int_0^1 f'(x + \tau\eta) d\tau$$

是关于 η 的连续函数. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 先取定正数 M , 使得

$$|I_1| + |I_3| < \frac{\varepsilon}{2},$$

然后利用公式 (3.7) 和 (3.8) 再取定 N_0 , 使得当 $N > N_0$ 时,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-M}^M g(x, \eta) \sin N\eta d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| \frac{f(x)}{\pi} \int_{-MN}^{MN} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

综上所述, 我们得到, 当 $N > N_0$ 时,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

从而完成定理的证明.

在应用 Fourier 变换求解初值问题 (3.4) 之前, 我们先推导一些 Fourier 变换的性质. 基于这些 Fourier 变换的性质我们将给出初值问题 (3.4) 的解的表达式.

性质 3.1 (线性性质) 若 $f_i(x) \in L^1(\mathbf{R})$, $a_i \in \mathbf{C}$ ($i = 1, 2$), 则

$$(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x))^\wedge = a_1 \hat{f}_1(\lambda) + a_2 \hat{f}_2(\lambda).$$

证明 显然成立.

性质 3.2 (微商性质) 若 $f(x), f'(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$, 则

$$(f'(x))^\wedge = i\lambda \hat{f}(\lambda).$$

证明 由于 $f'(x) \in C(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$, 因此由 Newton-Leibniz 公式

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) dx$$

我们知, 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

存在. 又由于 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 故

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

利用上式和分部积分公式得到

$$\begin{aligned}
 (f'(x))^\wedge &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \\
 &= i\lambda \hat{f}(\lambda).
 \end{aligned}$$

性质 3.3 (乘多项式性质) 若 $f(x), xf(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$(xf(x))^\wedge = i \frac{d}{d\lambda} \hat{f}(\lambda).$$

证明 由于 $f(x), xf(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 故 $\hat{f}(\lambda)$ 是 λ 的连续可微函数, 且

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-ix) e^{-i\lambda x} dx \\
 &= -i(xf(x))^\wedge.
 \end{aligned}$$

附注 3.2 作为性质 3.2 和性质 3.3 的推论, 若 $f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$, 则

$$(f^{(m)}(x))^\wedge = (i\lambda)^m \hat{f}(\lambda);$$

若 $f(x), xf(x), \dots, x^m f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$(x^m f(x))^\wedge = i^m \frac{d^m}{d\lambda^m} \hat{f}(\lambda).$$

这里 m 是大于或等于 1 的正整数.

性质 3.4 (平移性质) 对任意常数 k , 若 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$(f(x-k))^\wedge = e^{-i\lambda k} \hat{f}(\lambda).$$

证明 由定义得到

$$(f(x-k))^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-k) e^{-i\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda(k+y)} dy \\
 &= e^{-i\lambda k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda y} dy \\
 &= e^{-i\lambda k} \hat{f}(\lambda).
 \end{aligned}$$

性质 3.5 (伸缩性质) 若 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$(f(kx))^\wedge = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right), \quad k \neq 0 \text{ 为常数}.$$

证明 不妨设 $k > 0$, 由定义得到

$$\begin{aligned}
 (f(kx))^\wedge &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx) e^{-i\lambda x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\lambda \frac{y}{k}} d\left(\frac{y}{k}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{k}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\frac{\lambda}{k} y} dy \\
 &= \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right).
 \end{aligned}$$

性质 3.6 (对称性质) 若 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$(f(x))^\vee = \hat{f}(-\lambda).$$

证明 由定义得到

$$(f(x))^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \hat{f}(-\lambda).$$

性质 3.7 (卷积性质) 若 $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积 $f * g$ 定义为

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt,$$

则 $f * g(x) \in L^1(\mathbf{R})$, 且

$$(f * g(x))^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda).$$

证明 我们先证 $f * g(x) \in L^1(\mathbf{R})$. 由 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

从而 $f * g \in L^1(\mathbf{R})$.

又由 Fubini 定理, 我们知

$$\begin{aligned} (f * g(x))^\wedge &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\lambda t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-i\lambda(x-t)} dx \right] dt \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda). \end{aligned}$$

下面我们利用 Fourier 变换的性质来求几个特殊函数的 Fourier 变换.

例 1 设

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A \end{cases} \quad (A > 0).$$

求 $\hat{f}_1(\lambda)$.

解 由定义, 有

$$\hat{f}_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{-i\lambda x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda A}{\lambda}.$$

此例可以用于一维波动方程初值问题的求解.

例 2 设

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求 $\hat{f}_2(\lambda)$.

解 由定义, 有

$$\hat{f}_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\lambda)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\lambda)}.$$

例 3 设 $f_3(x) = e^{-|x|}$. 求 $\hat{f}_3(\lambda)$.

解 由于 $f_3(x) = f_2(x) + f_2(-x)$, 利用性质 3.1 和性质 3.5 则有

$$\begin{aligned} \hat{f}_3(\lambda) &= \hat{f}_2(\lambda) + (f_2(-x))^\wedge = \hat{f}_2(\lambda) + \hat{f}_2(-\lambda) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\lambda)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-i\lambda)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2)}. \end{aligned}$$

例 4 设 $f_4(x) = e^{-x^2}$. 求 $\hat{f}_4(\lambda)$.

解 由分部积分公式和性质 3.3 我们得到, 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \hat{f}_4(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\lambda} \left(e^{-x^2} e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx \right) \\ &= \frac{2i}{\lambda} (x f_4(x))^\wedge = -\frac{2}{\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda} \hat{f}_4(\lambda). \end{aligned}$$

注意到恒等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

我们导出 $\hat{f}_4(\lambda)$ 作为 λ 的函数满足下列常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda} \hat{f}_4(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} \hat{f}_4(\lambda), \\ \hat{f}_4(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

求解上述常微分方程初值问题得 $\hat{f}_4(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda^2/4}$.

例 5 设

$$f_5(x) = e^{-Ax^2} \quad (A > 0).$$

求 $\hat{f}_5(\lambda)$.

解 利用性质 3.5 得到

$$\begin{aligned} \hat{f}_5(\lambda) &= (f_4(\sqrt{A}x))^{\wedge} = \frac{1}{\sqrt{A}} \hat{f}_4\left(\frac{\lambda}{\sqrt{A}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2A}} e^{-\frac{\lambda^2}{4A}}. \end{aligned}$$

此例将在求解热方程初值问题过程中扮演重要的角色.

在这一小节的最后, 我们简要介绍多维 Fourier 变换的定义和一些重要事实.

定义 3.2 设 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 则无穷积分

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i\lambda \cdot x} dx$$

有意义, 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**. 这里 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$, 记为 $(f(x))^{\wedge} = \hat{f}(\lambda)$.

实际上, 我们可以证明下面的定理.

定理 3.3 (反演公式) 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap C^1(\mathbf{R}^n)$, 则

$$(\hat{f}(\lambda))^{\vee} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|\lambda| \leq N} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda \cdot x} d\lambda = f(x),$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. $(\hat{f}(\lambda))^{\vee}$ 表示在 Cauchy 主值意义下的无穷积分, 称为 $\hat{f}(\lambda)$ 的 **Fourier 逆变换**. 换句话说,

$$(\hat{f})^{\vee} = f.$$

对于多维 Fourier 变换, 容易证明有类似于一维 Fourier 变换的性质 3.1 ~ 3.7 成立.

性质 3.1' (线性性质) 若 $f_j(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $a_j \in \mathbf{C}$ ($j = 1, 2$), 则

$$(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x))^{\wedge} = a_1 \hat{f}_1(\lambda) + a_2 \hat{f}_2(\lambda).$$

性质 3.2' (微商性质) 若 $f(x), Df(x) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$, 则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^{\wedge} = i\lambda_j \hat{f}(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

性质 3.3' (乘多项式性质) 若 $f(x), x_j f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots, n$, 则

$$(x_j f(x))^{\wedge} = i \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \hat{f}(\lambda).$$

附注 3.2' 作为性质 3.2' 和 3.3' 的推论, 若 $f(x), Df(x), \dots, D^k f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap C(\mathbf{R}^n)$, 则

$$(D^\alpha f(x))^{\wedge} = (i\lambda)^\alpha \hat{f}(\lambda);$$

若 $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 则

$$(x^\alpha f(x))^{\wedge} = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}(\lambda).$$

这里 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是阶数小于或等于 k 的多重指标, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

性质 3.4' (平移性质) 对任意固定的 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 若 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 则

$$(f(x - x_0))^{\wedge} = e^{-i\lambda \cdot x_0} \hat{f}(\lambda).$$

性质 3.5' (伸缩性质) 若 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 则

$$(f(kx))^{\wedge} = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{k}\right), \quad k \neq 0.$$

性质 3.6' (对称性质) 若 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 则

$$(f(x))^{\vee} = \hat{f}(-\lambda).$$

性质 3.7' (卷积性质) 若 $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积 $f * g$ 定义为

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy,$$

则 $f * g(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$ 且

$$(f * g(x))^{\wedge} = (\sqrt{2\pi})^n \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda).$$

同时我们还有如下结论.

性质 3.8' (分离变量性质) 若 $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$, 其中 $f_j(x_j) \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$\hat{f}(\lambda) = \prod_{i=1}^n \hat{f}_i(\lambda_i).$$

这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$.

证明 由定义将重积分化为累次积分即得证.

例 6 设 $f_6(x) = e^{-A|x|^2}$ ($A > 0$). 求 $\hat{f}_6(\lambda)$.

解 事实上, 由分离变量性质我们得到

$$\hat{f}_6(\lambda) = \prod_{i=1}^n (e^{-Ax_i^2})^{\wedge} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2A}} e^{-\frac{\lambda_i^2}{4A}} = \frac{1}{(2A)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\lambda|^2}{4A}}$$

3.1.2 初值问题和基本解

现在我们利用 Fourier 变换来求解初值问题 (3.4). 对方程和初始条件两边关于 x 作 Fourier 变换, 利用性质 3.1 和性质 3.2 得到

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + a^2\lambda^2\hat{u} = \hat{f}(\lambda, t), \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, t)$ 是解 $u(x, t)$ 关于 x 的 Fourier 变换. 解这个常微分方程的初值问题得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} \, d\tau.$$

然后对上式两边求 Fourier 逆变换得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\hat{u}(\lambda, t))^{\vee} \\ &= (\hat{\varphi}e^{-a^2\lambda^2 t})^{\vee} + \int_0^t (\hat{f}(\lambda, \tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)})^{\vee} \, d\tau. \end{aligned}$$

利用性质 3.5 的结论, 我们得到

$$e^{-a^2\lambda^2 t} = (g(x, t))^{\wedge},$$

其中

$$g(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

从而

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi}e^{-a^2\lambda^2 t})^{\vee} &= (\hat{\varphi}\hat{g})^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi * g \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \, d\xi. \end{aligned}$$

同理

$$(\hat{f}(\lambda, \tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)})^{\vee} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \, d\xi.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi, t) \varphi(\xi) \, d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

这里

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

称为 Poisson 核.

表达式 (3.9) 称为 **Possion 公式**, $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = K(x - \xi, t - \tau)$ 称为热方程的 **基本解**. 热方程的基本解也可以如下定义.

***定义 3.3** 对于任意 $(\xi, \tau) \in \mathbf{R}_+^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, 若函数 $u(x, t) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}_+^2) \cap C(\mathbf{R}_+^2 \setminus (\xi, \tau))$ 且在广义函数意义下满足方程和初始条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x - \xi, t - \tau), & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

则称之为热方程的 **基本解**, 且记为 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$. 这里 $\delta(x - \xi, t - \tau)$ 是 Dirac 测度.

基本解的物理意义如下: 考虑两端均在无穷远点, 侧表面绝热的均匀细杆. 在 $t = \tau$ 时刻, 在 $x = \xi$ 处放置一个瞬时单位点热源, 那么由这个瞬时单位点热源在杆上产生的温度分布实际上就是基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$. 因此基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 也称为 **点源函数**.

基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 具有下列性质:

性质 3.9 当 $t > \tau$ 时, $\Gamma(x, t; \xi, \tau) > 0$.

性质 3.10 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(\xi, t; x, \tau)$.

性质 3.11 当 $t > \tau$, $x \in \mathbf{R}$ 时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) d\xi = 1.$$

证明 当 $t > \tau$ 时, 作变量替换 $\eta = (\xi - x)/(2a\sqrt{t - \tau})$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\ &= 1. \end{aligned}$$

性质 3.12 当 $t > \tau$, $x \in \mathbf{R}$ 时, $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 关于所有自变量

无穷次连续可微, 且满足方程

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + a^2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} = 0.$$

证明 直接验证即可.

性质 3.13 当 $t > \tau$ 时, 成立估计式

$$|\Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}}.$$

证明 从基本解的表达式即可证.

性质 3.14 若 $\varphi \in C(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$, 即 φ 是 $\mathbf{R}$ 上连续的有界函数, 则对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 成立

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

证明 作变量替换 $\eta = (\xi - x)/(2a\sqrt{t})$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta.$$

利用 φ 的有界性和连续性, 上述积分在 $t \in \mathbf{R}_+$ 上关于 t 一致收敛. 因此

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta \\ &= \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

利用基本解的性质我们容易得到下列结论.

定理 3.4 设 $\varphi(x) \in C(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$, $f(x, t) \equiv 0$, 则 Possion 公式 (3.9) 表示的函数 $u(x, t)$ 是初值问题 (3.4) 的有界 $C^{2,1}(\mathbf{R}_+^2)$ 解, 其中函数 $u(x, t)$ 在极限的意义下取初值 $\varphi(x)$.

证明 当 $(x, t) \in \mathbf{R}_+^2$ 时,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \\ &\leq \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(\xi)| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\ &\leq \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(\xi)|. \end{aligned}$$

另外, 固定任何一点 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}_+^2$, 我们在其邻域 $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \times \left(\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}\right)$ 内考虑 $u(x, t)$ 的微分性质. 因此, $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 在此邻域上无穷

次可微, 而 $e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ 与任何次数的多项式 $P(\xi)$ 的乘积在 $\mathbf{R}$ 上可积, 根据微积分的一致收敛定理我们知道 Poisson 公式 (3.9) 中的 $u(x, t)$ 关于 x, t 求任意阶偏导数可以与关于 ξ 求积分交换次序. 由此我们得到 $u(x, t)$ 是 $C^\infty(\mathbf{R}_+^2)$ 中的函数, 而且

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial K(x - \xi, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 K(x - \xi, t)}{\partial x^2} \right] \varphi(\xi) d\xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

从而证明 $u(x, t)$ 满足热方程.

接着我们证明 $u(x, t)$ 满足初值条件. 在 $u(x, t)$ 的积分表达式中作变量替换 $\eta = (\xi - x)/(2a\sqrt{t})$, 则

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta.$$

利用 φ 的有界性和连续性, 上述积分在 $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ 上关于 x, t 一致收敛. 因此

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0+}} u(x, t) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \rightarrow 0+}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x_0) d\eta \\ &= \varphi(x_0). \end{aligned}$$

至此完成定理的证明.

附注 3.3 定理 3.4 中关于 $\varphi(x)$ 有界的假设可以改进为

$$|\varphi(x)| \leq M e^{Ax^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

这里 A 和 M 是正常数. 此时 Poisson 公式 (3.9) 表示的函数 $u(x, t)$ 在区域 $\mathbf{R} \times (0, (4a^2A)^{-1})$ 上仍然是初值问题 (3.4) 的 C^∞ 解.

证明留作练习.

从 Poisson 公式 (3.9) 我们容易证明 (此处略) 下列重要性质.

性质 3.15 (奇偶性和周期性) 设 φ 是奇 (或偶, 或周期为 T 的) 函数, 则解 $u(x, t)$ 也是 x 的奇 (或偶, 或周期为 T 的) 函数.

性质 3.16 (无限传播速度) 设无穷长杆的初始温度 $\varphi(x)$ 在小段 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 大于零, 且在其他地方 $\mathbf{R} \setminus (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 等于零, 则杆在 $t > 0$ 时刻, 在任何一点 x 的温度

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi > 0.$$

性质 3.16 说明, 顷刻之间, 杆的热量传递到杆上的任何一点, 且离 x_0 近的点, 温度会升高多一些; 而离 x_0 远的点, 温度会升高少一些. 当然, 这个结论与线性的 Fourier 热传导定律有关.

性质 3.17 (无穷次可微性) 若 $\varphi(x) \in L^\infty(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$, 不管 $\varphi(x)$ 是否可微, 当 $t > 0$ 时, 解 $u(x, t)$ 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ 上必无穷次可微.

事实上, 当 $t > 0$ 时, 对于任意点 $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial t^l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{k+l} K}{\partial x^k \partial t^l} (x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi.$$

这是因为对于任何正数 δ , 上述积分在区域 $\mathbf{R} \times (\delta, +\infty)$ 一致收敛, 因而可以将求微商与求积分交换次序.

同样我们可以利用多维 Fourier 变换来求解多维热方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (3.11)$$

我们可以得到 Poisson 公式

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n} K(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.12)$$

这里

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

更一般地, 我们可以证明如下关于多维问题的结论.

定理 3.5 设 $\varphi(x) \in C(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f(x, t) \in C_0^{2,1}(\mathbf{R}_+^{n+1})$, 则 Poisson 公式 (3.12) 表示的函数是初值问题 (3.11) 的有界 $C^\infty(\mathbf{R}_+^{n+1})$ 解.

§ 3.2 混合问题和 Green 函数

在这一节中我们将考虑如下的物理模型: 设有长度为 l , 侧表面绝热的均匀细杆, 已知杆的各点的初始温度和细杆两端的温度, 要求出任何 $t > 0$ 时刻杆的温度分布 $u(x, t)$. 由此章引言我们知道, $u(x, t)$ 在区域 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ 满足如下混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.14)$$

我们将利用分离变量法来求解此问题. 在求解此混合问题之前, 我们先介绍分离变量法的理论基础 —— 特征值问题.

定义 3.4 常微分方程齐次边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, l), \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

($\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0, i = 1, 2$) 称为 **Sturm-Liouville 问题** 或 **特征值问题**. 使此问题有非零解的 $\lambda \in \mathbf{R}$ 称为此问题的 **特征值**, 相应的非零解称为对应于这个特征值的 **特征函数**.

对于特征值问题 (3.15) 我们有如下的结论.

定理 3.6 Sturm-Liouville 问题 (3.15) 具有如下性质:

- (1) 所有特征值都是非负实数. 特别地, 当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时, 所有特征值都是正数.
- (2) 不同特征值对应的特征函数必正交, 即不同特征值 λ, μ 对应的特征函数 $X_\lambda(x), X_\mu(x)$ 满足

$$\int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx = 0.$$

- (3) 所有特征值组成一个单调递增以无穷远点为聚点的序列:

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

- (4) 任意函数 $f(x) \in L^2((0, l))$ 可以按特征函数系展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x),$$

其中

$$C_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}.$$

这里无穷级数的收敛是指

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^l \left| f(x) - \sum_{n=1}^N C_n X_n(x) \right|^2 dx = 0.$$

下面我们给出定理 3.6 的证明. 在这里我们只给出性质 (1), 性质 (2) 和性质 (3) 的证明, 性质 (4) 的证明需要更深入的理论, 我们省略掉.

证明 (1) 设 $X_\lambda(x)$ 是对应于特征值 λ 的特征函数, 它满足特征值问题 (3.15). 以特征函数 $X_\lambda(x)$ 同乘方程两端, 并在 $[0, l]$ 上积分, 则

$$\lambda \int_0^l X_\lambda^2(x) dx + \int_0^l X_\lambda(x) X_\lambda''(x) dx = 0.$$

利用分部积分公式得到

$$\lambda \int_0^l X_\lambda^2(x) dx = \int_0^l |X_\lambda'(x)|^2 dx - X_\lambda(l)X_\lambda'(l) + X_\lambda(0)X_\lambda'(0).$$

注意到特征函数 $X_\lambda(x)$ 满足的边条件, 我们得到

$$\begin{aligned} X_\lambda'(0)X_\lambda(0) &= \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} [\alpha_1 |X_\lambda'(0)|^2 + \beta_1 X_\lambda^2(0)], \\ X_\lambda'(l)X_\lambda(l) &= -\frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} [\alpha_2 |X_\lambda'(l)|^2 + \beta_2 X_\lambda^2(l)]. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l X_\lambda^2(x) dx &= \int_0^l |X_\lambda'(x)|^2 dx + \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2} [\alpha_2 |X_\lambda'(l)|^2 + \beta_2 X_\lambda^2(l)] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} [\alpha_1 |X_\lambda'(0)|^2 + \beta_1 X_\lambda^2(0)]. \end{aligned}$$

于是 $\lambda \geq 0$. 而 $\lambda = 0$ 当且仅当

$$X_\lambda'(x) = 0$$

和

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} X_\lambda^2(0) + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} X_\lambda^2(l) = 0.$$

这意味着 $X_\lambda(x) = C$. 当 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 时, $X_\lambda(x) = 1$ 是特征值问题 (3.15) 的非零解, 因而 $\lambda = 0$ 是一个特征值. 而当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$

时, 则 $X_\lambda(x) = C = 0$, 也就是说特征值问题 (3.15) 只有零解, 因此 $\lambda = 0$ 不是特征值, 从而所有的特征值都是正数.

(2) 设 X_λ, X_μ 为对应于不同特征值 λ, μ 的特征值函数. 用 X_μ, X_λ 分别乘对应于 X_λ 和 X_μ 的方程, 并在 $[0, l]$ 上积分, 则

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx &= - \int_0^l X_\mu(x) X_\lambda''(x) dx, \\ \mu \int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx &= - \int_0^l X_\lambda(x) X_\mu''(x) dx. \end{aligned}$$

上述两式相减得到

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx &= \int_0^l [X_\lambda(x) X_\mu''(x) - X_\mu(x) X_\lambda''(x)] dx \\ &= \int_0^l [X_\lambda(x) X_\mu'(x) - X_\mu(x) X_\lambda'(x)]' dx. \end{aligned}$$

令行列式

$$\begin{aligned} J(x) &= \begin{vmatrix} -X_\lambda'(x) & X_\lambda(x) \\ -X_\mu'(x) & X_\mu(x) \end{vmatrix} \\ &= X_\lambda(x) X_\mu'(x) - X_\mu(x) X_\lambda'(x), \end{aligned}$$

则

$$(\lambda - \mu) \int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx = \int_0^l J'(x) dx = J(l) - J(0).$$

注意到齐次边值条件

$$\begin{aligned} -\alpha_1 X_\lambda'(0) + \beta_1 X_\lambda(0) &= 0, \\ -\alpha_1 X_\mu'(0) + \beta_1 X_\mu(0) &= 0, \end{aligned}$$

我们得到一个以 α_1, β_1 为未知量的二元一次方程组, 由于 $\alpha_1 + \beta_1 > 0$, 因而此二元一次方程组具有非零解, 从而它的系数行列式必定为

零, 即

$$J(0) = \begin{vmatrix} -X'_\lambda(0) & X_\lambda(0) \\ -X'_\mu(0) & X_\mu(0) \end{vmatrix} = 0.$$

同理利用另一个边值条件可得 $J(l) = 0$. 将它们代入上式, 则有

$$(\lambda - \mu) \int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx = 0.$$

由于 $\lambda \neq \mu$, 故

$$\int_0^l X_\lambda(x) X_\mu(x) dx = 0.$$

这也就是说不同特征值对应的特征值函数相互正交.

(3) 从性质 (1) 知 $\lambda \geq 0$, 我们记 $\mu = \sqrt{\lambda}$. 此时特征值问题 (3.15) 的常微分方程的通解为

$$X(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 将通解代入特征值问题 (3.15) 的边值条件, 则得一个关于 C_1, C_2 的二元一次线性方程组

$$\begin{cases} (-\alpha_1 \mu) C_1 + \beta_1 C_2 = 0, \\ (\alpha_2 \mu \cos \mu l + \beta_2 \sin \mu l) C_1 + (\beta_2 \cos \mu l - \alpha_2 \mu \sin \mu l) C_2 = 0. \end{cases}$$

由于我们求解的特征函数不恒为零, 因此 C_1, C_2 不同时为零, 于是上述关于 C_1, C_2 的二元一次线性方程有非零解. 此时使其有非零解的充分必要条件是行列式为零, 也就是

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 \mu & \beta_1 \\ \alpha_2 \mu \cos \mu l + \beta_2 \sin \mu l & \beta_2 \cos \mu l - \alpha_2 \mu \sin \mu l \end{vmatrix} = 0.$$

上式化简后得到

$$(\alpha_1 \alpha_2 \mu^2 - \beta_1 \beta_2) \sin \mu l = (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \mu \cos \mu l.$$

我们分别考虑下列九种情形:

1° 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\sin \mu l = 0,$$

因而得到无穷多个 μ_n 满足方程. 仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2° 当 $\beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\mu \sin \mu l = 0,$$

因而得到无穷多个 μ_n 满足方程. 仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

3° 当 $\alpha_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\mu \cos \mu l = 0,$$

因而得到无穷多个 μ_n 满足方程. 仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \frac{1}{l^2} \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \left[\left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{l} \right] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

4° 当 $\alpha_2 = \beta_1 = 0, \alpha_1 > 0, \beta_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\mu \cos \mu l = 0,$$

因而得到无穷多个 μ_n 满足方程. 仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \frac{1}{l^2} \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \left[\left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{x}{l} \right] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

5° 当 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\tan \mu l = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \mu.$$

对于任意正整数 n , 由于

$$\lim_{\mu \rightarrow (n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}+0} \tan \mu l = -\infty, \quad \lim_{\mu \rightarrow (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}-0} \tan \mu l = +\infty,$$

因而存在一个 μ_n 满足方程, 且

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} < \mu_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

6° 当 $\alpha_2 = 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\tan \mu l = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu.$$

不难证明有无穷多个 μ_n 满足方程, 且

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} < \mu_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu_n \cos \mu_n x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

7° 当 $\beta_1 = 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\cot \mu l = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \mu.$$

不难证明有无穷多个 μ_n 满足方程, 且

$$(n-1)\frac{\pi}{l} < \mu_n < \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \cos \mu_n x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

8° 当 $\beta_2 = 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0$ 时, 方程简化成

$$\cot \mu l = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu.$$

不难证明有无穷多个 μ_n 满足方程, 且

$$(n-1)\frac{\pi}{l} < \mu_n < \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu_n \cos \mu_n x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

9° 当 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 时, 上述方程简化成

$$\cot \mu l = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1} \mu - \frac{\beta_1 \beta_2}{(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \mu}.$$

上式右端函数是一个严格递增函数, 当 $\mu \rightarrow 0+$ 时, 它趋于负无穷, 而当 $\mu \rightarrow +\infty$ 时, 它的渐近线为 $y = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1} \mu$. 不难证明有无穷多个 μ_n 满足方程, 且

$$(n-1)\frac{\pi}{l} < \mu_n < \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

仔细计算后得到此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \mu_n \cos \mu_n x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

综上所述我们就完成了性质 (3) 的证明.

附注 3.4 从性质 (1) 知, 当且仅当 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 时, $\lambda = 0$ 才是 Sturm-Liouville 问题 (3.15) 的特征值. 也就是说, $\lambda = 0$ 只是具有第二边值条件的 Sturm-Liouville 问题的特征值, 这时它对应的特征值函数为 $X_\lambda = 1$.

附注 3.5 从性质 (4) 知: $\{X_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 组成 $L^2(0, l)$ 空间的一组完备正交基. 把它们规范化, 令

$$X_n^*(x) = \frac{X_n(x)}{\sqrt{\int_0^l X_n^2 dx}},$$

则 $\{X_n^*(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $L^2(0, l)$ 空间的一组标准正交基. 对于空间 $L^2(0, l)$ 的任一函数 $f(x)$, 都可以按这组标准正交基展开成

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* X_n^*(x),$$

其中 Fourier 系数为

$$C_n^* = \int_0^l f(x) X_n^*(x) dx = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\sqrt{\int_0^l X_n^2 dx}}.$$

定理 3.6 的结论极为重要, 因而必须熟练掌握. 尽管其中性质 (3) 的证明比较冗长, 但它给出了各种情况下特征值和特征函数的求解方法, 因此我们详尽地对其中的所有九种情形给出证明. 这对我们以后求解具体问题会有较大的帮助. 当然, 若用泛函分析的理论, 性质 (3) 的证明可以非常简单.

现在我们利用分离变量法来构造混合问题 (3.14) 的解. 我们不妨假设

$$g_1(t) \equiv 0, \quad g_2(t) \equiv 0,$$

否则作一个函数替换

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} g_2(t) + \frac{l-x}{l} g_1(t), \quad (3.16)$$

得到一个关于 $v(x, t)$ 的齐次边值问题. 利用下列求解方法先求出 $v(x, t)$, 然后便可得到混合问题的解 $u(x, t)$. 下面我们分别讨论混合问题 (3.14) 的方程中非齐次项恒为零和不恒为零的情形.

1. $f(x, t) \equiv 0$ 的情形

考虑分离变量形式的非零解

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

将它代入齐次方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

于是

$$T'(t)X(x) - a^2 X''(x)T(t) = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T],$$

即

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

在上式中, 左端是 t 的函数, 右端是 x 的函数, 因而只能是常数, 记为 $-\lambda$, 从而

$$T' + a^2 \lambda T = 0, \quad t \in (0, T],$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, l).$$

将 $u(x, t)$ 代入齐次边值条件

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

于是

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

而 $u(x, t) \neq 0$, 因此 $T(t) \neq 0$, 从而

$$X(0) = X(l) = 0.$$

于是我们得到

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, l), \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

由定理 3.6 中 (3) 的证明之 1° 我们知此特征值问题的所有特征值是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

与特征值 λ_n 对应的特征函数是

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots.$$

而与 $X_n(x)$ 对应的 $T_n(t)$ 为

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

从形式上看, 每一个 $u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 都满足方程和边值条件, 但一般来讲它们都不满足初始条件. 为求一个既满足方程和边值条件, 又满足初始条件的解, 我们将 $u_n(x, t)$ 叠加. 形式上,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

满足方程. 从特征函数的性质我们知道 $u(x, t)$ 满足混合问题 (3.14) 的边值条件. 为使 $u(x, t)$ 满足初始条件, 我们需要

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

由于特征函数系 $\left\{\sin \frac{n\pi}{l}x\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的完备性, 我们得到

$$T_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx.$$

于是混合问题 (3.14) 的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

2. $f(x, t) \neq 0$ 的情形

此时我们仍然可以利用分离变量法来求解. 具体来说, 把解 $u(x, t)$, 非齐次项 $f(x, t)$ 和初值 $\varphi(x)$ 都按特征函数系 $\left\{\sin \frac{n\pi}{l}x\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 展开:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x,$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

由特征函数系 $\left\{\sin \frac{n\pi}{l}x\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的正交性和完备性得到,

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, d\xi.$$

为求出未知函数 $T_n(t)$, 把上述表达式代入混合问题 (3.14) 中的方程, 由特征函数系 $\left\{\sin \frac{n\pi}{l}x\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的完备性, 从而得到 $T_n(t)$ 满足以下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), & t \in (0, T], \\ T_n(0) = \varphi_n. \end{cases}$$

求解此问题得到

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \, d\tau, \quad n = 1, 2, \dots.$$

将它们代入 $u(x, t)$ 的表达式, 就得到混合问题 (3.14) 的解为

$$u(x, t) = \int_0^l \varphi(\xi) \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \right] d\xi \\ + \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \right] d\xi.$$

记

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} H(t-\tau), \quad (3.17)$$

其中 $H(t)$ 表示 Heaviside 函数, 其定义为

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

于是上式简化为

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \\ + \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.18)$$

当 $t > \tau$ 时, 表达式 (3.17) 中的级数关于 x, ξ 是一致收敛的.

函数 $G(x, t; \xi, \tau)$ 称为混合问题 (3.14) 的 **Green 函数**. 公式 (3.18) 说明混合问题 (3.14) 的解可以由 Green 函数表示出来. Green 函数在位势方程和热方程中占有重要地位, 通过 Green 函数我们可以构造出一般的位势方程和热方程的定解问题的解. 我们在这里只是构造出混合问题 (3.14) 的 Green 函数的形式. 实际上, 从广义函数的观点我们更容易理解 Green 函数的物理意义.

***附注 3.6** Green 函数是混合问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \delta(x - \xi, t - \tau), & (x, t) \in Q_T, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, l] \end{cases}$$

在广义函数意义下, 在函数类 $L^1(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T \setminus (\xi, \tau))$ 中的解, 这里 $(\xi, \tau) \in Q_T = (0, l) \times (0, T]$. 其物理意义如下: 考虑长度为 l , 侧表面绝热, 两端始终保持零度的均匀细杆. 在 $t = \tau$ 时刻, 在 $x = \xi$ 处放置一个单位点热源, 那么由此产生的温度分布实际上就是 Green 函数.

由表达式 (3.17) 我们不难证明 Green 函数具有下列性质:

(1) **对称性** $G(x, t; \xi, \tau) = G(\xi, t; x, \tau)$;

(2) **平移不变性** 当 $t > \tau$ 时,

$$G(x, t; \xi, \tau) = G(x, t - \tau; \xi, 0);$$

(3) **光滑性** 当 $t > \tau$ 时, $G(x, t; \xi, \tau)$ 关于所有自变量无穷次连续可微, 且满足方程

$$\frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \tau} + a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = 0;$$

(4) **齐次边值条件** 当 $t > \tau$ 时, Green 函数满足边值条件

$$G(0, t; \xi, \tau) = G(l, t; \xi, \tau) = 0;$$

(5) **关于 x, ξ 的一致有界性** 当 $t > \tau$ 时, 成立估计式

$$|G(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

证明

$$\begin{aligned} |G(x, t; \xi, \tau)| &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \\ &= \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \frac{a\pi}{l} \\ &\leq \frac{2}{a\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(t-\tau)x^2} dx \\ &= \frac{2}{a\pi\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

(6) 若 $\varphi \in C^1[0, l]$ 且 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, 则对于任意 $x \in [0, l]$, 成立

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

证明 由 $\varphi(x)$ 满足的条件, 从数学分析我们知道 $\varphi(x)$ 可以按完备正交系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} (n = 1, 2, \dots)$ 展开成 Fourier 级数, 且对于所有 $x \in [0, l]$, 成立

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中 Fourier 系数

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi.$$

而对于任意 $t > 0$, 表达式 (3.17) 中的级数关于 x, ξ 是一致收敛的. 因此我们可以交换求和与求积分的次序得到

$$\begin{aligned} & \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}. \end{aligned}$$

由 Abel 判别法上式右端的级数关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛, 因而求极限可与求积分交换次序. 于是

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x).$$

为了保证公式 (3.18) 表示的解 $u \in C([0, l] \times [0, T])$, 我们需要在定解区域 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ 的角点 $(0, 0)$ 和 $(0, l)$ 提适当的相容性条件. 在齐次边值条件 $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$ 的情形我们需要

$$u(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0),$$

$$u(l, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(l, t) = \lim_{x \rightarrow l} u(x, 0).$$

也就是说,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

根据 Green 函数的性质我们可以证明下列关于解的存在性的结论.

定理 3.7 记 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$. 假设边值 $g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$, 初值 $\varphi(x) \in C^1[0, l]$ 且满足相容性条件 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, 非齐次项 $f(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T)$, 则由表达式 (3.18) 确定的 $u(x, t)$ 是混合问题 (3.14) 在函数类 $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 中的解. 如果 $f(x, t) \equiv 0$, 则 $u(x, t) \in C^\infty(Q_T)$.

利用 Green 函数的性质可证明此定理. 我们略去证明.

更一般地, 我们可以求出混合问题 (3.14) 的形式解. 具体来说, 我们先利用函数变换 (3.16) 得到函数 $v(x, t)$ 满足的齐次边值问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = \tilde{f}(x, t), & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), & x \in [0, l], \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases}$$

其中

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - \left[\frac{l-x}{l} g_1'(t) + \frac{x}{l} g_2'(t) \right],$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \left[\frac{l-x}{l} g_1(0) + \frac{x}{l} g_2(0) \right].$$

由表达式 (3.18) 我们得到函数 $v(x, t)$ 的表达式

$$v(x, t) = \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi.$$

利用函数变换 (3.16) 和分部积分我们进一步得到

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^l G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \\ & + a^2 \int_0^t [G_\xi(x, t; 0, \tau) g_1(\tau) - G_\xi(x, t; l, \tau) g_2(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.19)$$

这里我们略去具体的推导过程. 有兴趣的读者可参阅参考文献 [8] 中第三章第二节. 值得说明的是, 表达式 (3.19) 对边值 $g_1(t)$, $g_2(t)$ 的要求可以减弱为连续函数. 实际上, 我们可以证明下列结论.

定理 3.7' 记 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$. 如果初值 $\varphi(x) \in C^1[0, l]$, 边值 $g_i(t) \in C[0, T]$ ($i = 1, 2$), 且满足相容性条件 $\varphi(0) = g_1(0)$, $\varphi(l) = g_2(0)$, 非齐次项 $f(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T)$, 则由表达式 (3.19) 确定的 $u(x, t)$ 是混合问题 (3.14) 在函数类 $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 中的解. 如果 $f \equiv 0$, 则 $u \in C^\infty(Q_T)$.

证明留作练习.

§ 3.3 极值原理和最大模估计

3.3.1 极值原理

极值原理具有极为明确的物理意义. 在叙述极值原理之前, 我们先考虑以下实际问题.

对于一个物体, 如果其内部没有热源, 则在整个热传导过程中, 温度总是趋于平衡: 温度高处的热量向温度低处传递, 从而导致温度高处的热量减少, 温度降低; 而温度低处从温度高处吸收热量, 从而导致温度低处的热量增加, 温度升高. 正是因为这样的物理效应, 物体在一段时间内的最高温度和最低温度不可能在物体的内部达到, 因而只能在初始时刻或物体的边界上达到. 这种物理现象我们在数学上称为**极值原理**.

记区域 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$. Q_T 的侧边和底边我们称为**抛物边**

界, 通常记为 $\partial_p Q_T$. 实际上, $\partial_p Q_T = \partial Q_T \setminus (0, l) \times \{T\}$.

现在我们考虑长度为 l , 侧表面绝热的均匀细杆. 杆的温度分布 $u(x, t)$ 在 Q_T 上满足热方程

$$\mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t).$$

如果 $f(x, t) \geq 0$, 则表示杆上有热源; 如果 $f(x, t) \leq 0$, 则表示杆上有热汇.

从实际模型出发我们得到这样的结论.

定理 3.8 (极值原理) 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 满足方程 $\mathcal{L}u = f \leq 0$, 则 $u(x, t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上的最大值必在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上达到, 即

$$\max_{\bar{Q}_T} u(x, t) = \max_{\partial_p Q_T} u(x, t).$$

证明 由于 $\partial_p Q_T \subset \bar{Q}_T$, 因此不等式

$$\max_{\bar{Q}_T} u(x, t) \geq \max_{\partial_p Q_T} u(x, t)$$

成立. 我们只要证明不等式

$$\max_{\bar{Q}_T} u(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u(x, t)$$

就完成了定理的证明.

(1) 当 $f < 0$ 时, 我们断言 u 在 $\bar{Q}_T$ 上的最大值不能在 Q_T 内达到. 否则, 存在一点 $(x_0, t_0) \in Q_T$ 使得

$$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{Q}_T} u(x, t).$$

由微积分的定理我们得到

$$u_x(x_0, t_0) = 0, \quad u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0,$$

且

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \quad t_0 < T,$$

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad t_0 = T.$$

因此

$$f(x_0, t_0) = u_t(x_0, t_0) - a^2 u_{xx}(x_0, t_0) \geq 0.$$

这与假设 $f < 0$ 矛盾, 从而 u 不可能在 Q_T 内达到 $\bar{Q}_T$ 上的最大值, 因而只能在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上达到最大值. 于是所要证明的不等式成立.

(2) 当 $f \leq 0$ 时, 我们构造辅助函数, 将证明归结到上面的情形. 为此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 考虑辅助函数

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t.$$

计算得到

$$\mathcal{L}v = \mathcal{L}u - \varepsilon = f - \varepsilon < 0.$$

由 (1) 的断言, $v(x, t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上的最大值不可能在 Q_T 内达到, 因此

$$\max_{\bar{Q}_T} v(x, t) = \max_{\partial_p \bar{Q}_T} v(x, t).$$

于是

$$\begin{aligned} \max_{\bar{Q}_T} u(x, t) &\leq \max_{\bar{Q}_T} v(x, t) + \varepsilon T \\ &\leq \max_{\partial_p \bar{Q}_T} v(x, t) + \varepsilon T \\ &\leq \max_{\partial_p \bar{Q}_T} u(x, t) + \varepsilon T. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则得所要证明的不等式. 至此完成定理的证明.

定理 3.8 的证明思想我们在上一章位势方程的定理 2.19 和 2.20 的证明中使用过. 从本质上来看, 这种证明方法就是利用比较方程两端的符号来导出矛盾. 这是证明极值原理和最大模估计的重要方法.

推论 3.9 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 满足方程 $\mathcal{L}u = f \geq 0$, 则 $u(x, t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上的最小值必在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 达到, 即

$$\min_{\bar{Q}_T} u(x, t) = \min_{\partial_p \bar{Q}_T} u(x, t);$$

假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 满足方程 $\mathcal{L}u = 0$, 则 $u(x, t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 上的最大值和最小值必在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 达到.

证明 考虑 $v(x, t) = -u(x, t)$ 满足的方程, 应用定理 3.8 即得证.

推论 3.10 (比较原理) 假设 $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 满足 $\mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v$, $u|_{\partial_p Q_T} \leq v|_{\partial_p Q_T}$, 则在 $\bar{Q}_T$ 上 $u(x, t) \leq v(x, t)$.

证明 考虑 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. 由于 $\mathcal{L}w \leq 0$, 对 $w(x, t)$ 应用定理 3.8 得到

$$\max_{\bar{Q}_T} w(x, t) \leq \max_{\partial_p \bar{Q}_T} w(x, t) \leq 0.$$

至此我们完成比较原理的证明.

3.3.2 第一边值问题的最大模估计

考虑第一边值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.20)$$

利用极值原理我们可以得到下面的最大模估计.

定理 3.11 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 是问题 (3.20) 的解, 则

$$\max_{\bar{Q}_T} |u(x)| \leq FT + B, \quad (3.21)$$

其中

$$F = \sup_{Q_T} |f|, \quad B = \max \left\{ \max_{[0, l]} |\varphi|, \max_{[0, T]} |g_1|, \max_{[0, T]} |g_2| \right\}.$$

证明 考虑辅助函数

$$w(x, t) = Ft + B \pm u(x, t).$$

容易验证

$$\mathcal{L}w = F \pm f \geq 0, \quad w|_{\partial_p Q_T} \geq B \pm u \geq 0.$$

由极值原理, 在 Q_T 上 $w(x) \geq 0$, 从而

$$|u(x, t)| \leq FT + B, \quad (x, t) \in Q_T.$$

两端取上确界, 则定理得证.

推论 3.12 混合问题 (3.20) 的解在 $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 中是惟一的.

证明 由于混合问题 (3.20) 是线性的, 为证明惟一性, 只需证明当 $f \equiv 0, \varphi \equiv 0, g_1 = g_2 \equiv 0$ 时, 问题 (3.20) 只有零解. 由最大模估计 (3.21), 这是显然的.

推论 3.13 混合问题 (3.20) 在 $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 中的解连续地依赖于非齐次项 f , 初值 φ , 边值 g_1, g_2 .

由推论 3.12, 3.13 我们知道最大模估计蕴涵着解的惟一性和稳定性.

3.3.3 第二、第三边值问题的最大模估计

下面我们考虑混合问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ [-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0} = g_1(t), & t \in [0, T], \\ [u_x + \beta(t)u]|_{x=l} = g_2(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.22)$$

其中 $\alpha(t) \geq 0, \beta(t) \geq 0$. 当 $\alpha(t) = \beta(t) \equiv 0$ 时, 上述问题就是第二边值问题; 当 $\alpha(t) > 0, \beta(t) > 0$ 时, 上述问题就是第三边值问题.

利用极值原理的证明方法我们可以得到下面的最大模估计.

定理 3.14 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ 是混合问题 (3.22) 的解, 则

$$\max_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq C(F + B), \quad (3.23)$$

其中常数 C 只依赖于 a, l 和 T , 而

$$F = \sup_{Q_T} |f|, \quad B = \max \left\{ \max_{[0, l]} |\varphi|, \max_{[0, T]} |g_1|, \max_{[0, T]} |g_2| \right\}.$$

在证明定理 3.14 之前, 我们先证明下列引理.

引理 3.15 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} \geq 0, & (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} \geq 0, & x \in [0, l], \\ [-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0} \geq 0, & t \in [0, T], \\ [u_x + \beta(t)u]|_{x=l} \geq 0, & t \in [0, T], \end{cases}$$

则在 $\bar{Q}_T$ 上 $u(x, t) \geq 0$.

证明 (1) 先假设 $u(x, t)$ 满足边值条件

$$\begin{aligned} [-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0} &> 0, \quad t \in [0, T], \\ [u_x + \beta(t)u]|_{x=l} &> 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

由定理 3.8 我们知道, $u(x, t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 的最小值在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上达到. 此时我们只需证明 $u(x, t)$ 在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上的最小值一定非负, 从而在 $\bar{Q}_T$ 上 $u(x, t) \geq 0$.

如果 $u(x, t)$ 在初始时刻 $t = 0$ 达到最小值, 显然最小值非负. 我们只需说明 u 不可能在边界 $x = 0$ 和 $x = l$ 上达到负的最小值. 如果 $u(x, t)$ 在某点 $(0, t_0)$ 达到负的最小值, 则

$$-u_x(0, t_0) \leq 0, \quad \alpha(t_0)u(0, t_0) \leq 0,$$

这与假设矛盾. 同理 $u(x, t)$ 不可能在边界 $x = l$ 上达到负的最小值. 这就说明, 如果 u 在边界 $x = 0$ 和 $x = l$ 上达到最小值, 则最小值一定非负. 因此 $u(x, t)$ 在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上的最小值一定非负, 从而在 $\bar{Q}_T$ 上 $u(x, t) \geq 0$.

(2) 对于一般情形, 我们将构造辅助函数, 把证明归结到上面的情形. 为此, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们考虑辅助函数

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon w(x, t),$$

其中

$$w(x, t) = 2a^2 t + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2. \quad (3.24)$$

注意到多项式函数 w 满足 $Lw = 0$, 我们计算得知

$$\mathcal{L}v = \mathcal{L}u \geq 0, \quad (x, t) \in Q_T.$$

显然

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} + \varepsilon \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \geq 0, \quad x \in [0, l].$$

由混合问题的边值条件我们得到, 当 $t \in [0, T]$ 时,

$$\begin{aligned} & [-v_x + \alpha(t)v]|_{x=0} \\ &= [-u_x + \alpha(t)u]|_{x=0} + \varepsilon \left[l + \alpha(t) \left(2a^2t + \frac{l^2}{4} \right) \right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [v_x + \beta(t)v]|_{x=l} \\ &= [u_x + \beta(t)u]|_{x=l} + \varepsilon \left[l + \beta(t) \left(2a^2t + \frac{l^2}{4} \right) \right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

应用 (1) 已证的结论我们得到, 在 $\bar{Q}_T$ 上 $v(x, t) \geq 0$, 即

$$u(x, t) \geq -\varepsilon \left[2a^2t + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \right], \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则在 $\bar{Q}_T$ 上 $u(x, t) \geq 0$. 这就是要证明的结论.

下面我们应用引理 3.15 来完成定理 3.14 的证明.

定理 3.14 的证明 我们构造辅助函数

$$v(x, t) = Ft + Bz(x, t) \pm u(x, t),$$

其中 F, B 在定理 3.14 中定义,

$$z(x, t) = 1 + \frac{1}{l}w(x, t),$$

而 $w(x, t)$ 由 (3.24) 定义. 不难验证

$$\begin{cases} \mathcal{L}z = z_t - a^2 z_{xx} = 0, & (x, t) \in Q_T, \\ z|_{t=0} \geq 1, & x \in [0, l], \\ [-z_x + \alpha(t)z]|_{x=0} \geq 1, & t \in [0, T], \\ [z_x + \beta(t)z]|_{x=l} \geq 1, & t \in [0, T], \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = F \pm f(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} \geq B \pm \varphi(x) \geq 0, & x \in [0, l], \\ [-v_x + \alpha(t)v]|_{x=0} \geq B \pm g_1(t) \geq 0, & t \in [0, T], \\ [v_x + \beta(t)v]|_{x=l} \geq B \pm g_2(t) \geq 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

我们利用引理 3.15 得到, 在 $\bar{Q}_T$ 上 $v(x, t) \geq 0$. 于是, 对于 $(x, t) \in \bar{Q}_T$, 有

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq Ft + Bz(x, t) \\ &\leq FT + \left(1 + \frac{2a^2T}{l} + \frac{l}{4}\right)B. \end{aligned}$$

令

$$C = \max \left\{ T, 1 + \frac{2a^2T}{l} + \frac{l}{4} \right\},$$

上式两端取上确界我们立即得到估计 (3.23).

3.3.4 初值问题的最大模估计

在区域 $Q_T = \mathbf{R} \times (0, T]$ 上考虑初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.25)$$

当 $f \equiv 0$, $\varphi(x)$ 有界连续时, Poisson 公式 (3.9) 给出上述初值问题的一个有界解. 下面的最大模估计将保证初值问题 (3.25) 的有界解是惟一的.

定理 3.16 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 是初值问题 (3.25) 的有界解, 则

$$\sup_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq T \sup_{Q_T} |f(x, t)| + \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|.$$

证明 对于任意 $L > 0$, 考虑区域 $Q_T^L = (-L, L) \times (0, T]$, 并记

$$F = \sup_{Q_T} |f(x, t)|, \quad \Phi = \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|.$$

令

$$M = \sup_{Q_T} |u(x, t)|.$$

在 Q_T^L 上考虑辅助函数

$$w(x, t) = Ft + \Phi + v_L(x, t) \pm u(x, t),$$

其中

$$v_L(x, t) = \frac{M}{L^2}(x^2 + 2a^2t).$$

我们计算得到

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = F \pm f(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q_T^L, \\ w|_{t=0} \geq \Phi \pm \varphi(x) \geq 0, & x \in [-L, L], \\ w|_{x=\pm L} \geq M \pm u \geq 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

在 Q_T^L 上利用极值原理可得 $\min_{Q_T^L} w(x, t) \geq 0$. 而对于任意 $(x_0, t_0) \in$

Q_T , 存在足够大的 L , 使得 $(x_0, t_0) \in Q_T^L$. 由 $w(x_0, t_0) \geq 0$ 得到

$$|u(x_0, t_0)| \leq Ft_0 + \Phi + \frac{M}{L^2}(x_0^2 + 2a^2t_0).$$

令 $L \rightarrow +\infty$, 则

$$|u(x_0, t_0)| \leq Ft_0 + \Phi \leq FT + \Phi.$$

由 (x_0, t_0) 的任意性, 我们完成定理的证明.

定理 3.16 中关于 $u(x, t)$ 有界的假设可以改进为

$$|u(x, t)| \leq Me^{Ax^2}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3.26)$$

这里 M, A 是正常数. 通常称条件 (3.26) 为 **增长性条件**.

***定理 3.16'** 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 是初值问题 (3.25) 的解且满足增长性条件 (3.26), 则

$$\sup_{\bar{Q}_T} |u(x, t)| \leq T \sup_{Q_T} |f(x, t)| + \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|.$$

证明 实际上我们只需证明不等式

$$|u(0, t)| \leq T \sup_{Q_T} |f(x, t)| + \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|, \quad t \in [0, T],$$

这是因为在平移变换下我们由上述不等式可以得到

$$|u(x, t)| \leq T \sup_{Q_T} |f(x, t)| + \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|, \quad x \in \mathbf{R}, t \in [0, T].$$

两端取上确界即得要证的结论.

我们分两步来证明:

(1) 首先假设

$$T \leq \frac{1}{16a^2A}.$$

对于任意 $L > 0$, 考虑区域 $Q_T^L = (-L, L) \times (0, T]$, 并记

$$F = \sup_{Q_T} |f(x, t)|, \quad \Phi = \sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|.$$

在 Q_T^L 上考虑辅助函数

$$w(x, t) = Ft + \Phi + v_\varepsilon(x, t) \pm u(x, t),$$

其中

$$v_\varepsilon(x, t) = \frac{\varepsilon}{(2T-t)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{x^2}{4a^2(2T-t)}}, \quad \varepsilon > 0.$$

注意到

$$\mathcal{L}v_\varepsilon = 0, \quad (x, t) \in Q_T^L,$$

我们计算得到

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = F \pm f(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q_T^L, \\ w|_{t=0} \geq \Phi \pm \varphi(x) \geq 0, & x \in [-L, L]. \end{cases}$$

利用关于 T 的假设和增长性条件 (3.26), 我们得到

$$\begin{aligned} w|_{x=\pm L} &\geq \frac{\varepsilon}{(2T)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{L^2}{8a^2T}} - Me^{AL^2} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{(2T)^{\frac{1}{2}}} e^{2AL^2} - Me^{AL^2}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 存在 $L_\varepsilon > 0$, 使得当 $L \geq L_\varepsilon$ 时,

$$w|_{x=\pm L} \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

在 Q_T^L ($L \geq L_\varepsilon$) 上利用极值原理可得 $\min_{Q_T^L} w(x, t) \geq 0$. 对于任意 $t \in$

$[0, T]$, 由 $w(0, t) \geq 0$ 我们得到

$$|u(0, t)| \leq Ft + \Phi + \frac{\varepsilon}{T^{\frac{1}{2}}}.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则

$$|u(0, t)| \leq Ft_0 + \Phi \leq FT + \Phi, \quad t \in [0, T].$$

(2) 我们将时间区间 $[0, T]$ 分为 m 段: $[0, T_1]$, $[T_1, 2T_1]$, $\dots$, $[(m-1)T_1, mT_1]$, 其中 $T = mT_1$ 且

$$T_1 \leq \frac{1}{16a^2A}.$$

先在区间 $[0, T_1]$ 上利用 (1) 的结论从而得到在带型区域 $\mathbf{R} \times [0, T_1]$ 上关于 $u(x, t)$ 的估计, 然后在带型区域 $\mathbf{R} \times [T_1, 2T_1]$ 上考虑初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R} \times (T_1, 2T_1], \\ u|_{t=T_1} = \varphi_1(x) = u(x, T_1), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

得到在带型区域 $\mathbf{R} \times [T_1, 2T_1]$ 上关于 $u(x, t)$ 的估计. 利用数学归纳法我们就得到在区域 $\mathbf{R} \times [0, T]$ 上关于 $u(x, t)$ 的估计.

综上我们完成定理的证明.

由定理 3.16' 我们得到初值问题 (3.25) 的满足增长性条件 (3.26) 的解的惟一性. 然而惟一性在一般情形并不成立.

***附注 3.7** 实际上, 初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

具有无穷多解. 除零解外, 每个解在 $|x| \rightarrow \infty$ 时都增长得非常快.

下面我们引述 Tychonov 的例子来说明上述结论.

记函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

定义函数

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

形式上我们有

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(0) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0,$$

且

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) (2n)(2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

由于篇幅的关系, 我们在这里就不给出严格的证明. 有兴趣的读者可参阅文献 [2] 中第五章第五节的内容.

3.3.5 混合问题的能量模估计

在这一节中我们讨论混合问题的能量模估计. 为简单起见, 我们考虑第一边值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx} = f, & (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.27)$$

其中 $Q_T = (0, l) \times (0, T]$. 其他的边值问题可以类似讨论. 我们将证明如下能量模估计.

定理 3.17 设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 是问题 (3.27) 的解, 则

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l u^2(x, t) dx + 2a^2 \int_0^T \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq M \left(\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中 M 只与 T 有关.

在证明定理 3.17 之前, 我们先证明下列引理.

引理 3.18 (Gronwall 不等式) 设非负函数 $G(\tau)$ 在 $[0, T]$ 上连续可微, $G(0) = 0$, 且对 $\tau \in [0, T]$, 有微分不等式

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq CG(\tau) + F(\tau), \quad (3.29)$$

其中 $C > 0$, $F(\tau)$ 是 $[0, T]$ 上的非负单调递增函数, 那么

$$G(\tau) \leq C^{-1}(e^{C\tau} - 1)F(\tau), \quad (3.30)$$

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^{C\tau} F(\tau). \quad (3.31)$$

证明 在不等式 (3.29) 两边同乘 $e^{-C\tau}$, 我们得到

$$\frac{d}{d\tau} [e^{-C\tau} G(\tau)] \leq e^{-C\tau} F(\tau).$$

上式两端在 $[0, \tau]$ 上积分得到

$$e^{-C\tau} G(\tau) \leq \int_0^\tau e^{-Ct} F(t) dt \leq F(\tau) C^{-1} (1 - e^{-C\tau}),$$

即

$$G(\tau) \leq C^{-1}(e^{C\tau} - 1)F(\tau).$$

将不等式 (3.30) 代入不等式 (3.29) 即得不等式 (3.31).

定理 3.17 的证明 在混合问题 (3.27) 的热方程两端同乘 u , 然后在 $Q_t = (0, l) \times (0, t]$ 上积分, 得到

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l [u^2]_t dx dt - a^2 \int_0^t \int_0^l uu_{xx} dx dt = \int_0^t \int_0^l uf dx dt.$$

对等式左端分部积分并利用边值条件, 右端利用 Schwarz 不等式 $2ab \leq a^2 + b^2$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^l u^2(x, t) dx + 2a^2 \int_0^t \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq \int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^t \int_0^l u^2(x, t) dx dt + \int_0^t \int_0^l f^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

记

$$G(t) = \int_0^t \int_0^l u^2(x, t) dx dt,$$

$$F(t) = \int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^t \int_0^l f^2(x, t) dx dt.$$

去掉上述不等式左端第二项, 我们得到 Gronwall 不等式

$$G'(t) \leq G(t) + F(t),$$

及

$$G(0) = 0.$$

利用 Gronwall 不等式的结论, 从而得到

$$G(t) \leq (e^t - 1)F(t).$$

将此不等式代入上述不等式得到

$$\begin{aligned} & \int_0^l u^2(x, t) dx + 2a^2 \int_0^t \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq e^t \left(\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^t \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right). \end{aligned}$$

对 $t \in (0, T]$ 取上确界得到

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l u^2(x, t) dx + 2a^2 \int_0^T \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq 2e^T \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right]. \end{aligned}$$

这就完成了证明.

附注 3.8 能量模估计同样适合于其他边值问题. 此外, 如果在混合问题 (3.27) 的热方程两端同乘 u_t , 然后在 Q_t 上积分可以得到更进一步的能量模估计

$$\begin{aligned} & a^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l u_x^2 dx + \int_0^T \int_0^l u_t^2 dx dt \\ & \leq 2 \left\{ a^2 \int_0^l [(\varphi'(x))]^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right\}. \end{aligned}$$

定理 3.19 混合问题 (3.27) 的解 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 是惟一的.

实际上关于惟一性我们还有更奇妙的结论.

***定理 3.20 (反向惟一性)** 设 $u_1, u_2 \in C^1(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \mathcal{L}u_2, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \\ u_1|_{t=T} = u_2|_{t=T}, & x \in [0, l], \\ u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}, \quad u_1|_{x=l} = u_2|_{x=l}, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.32)$$

则

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t), \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, T].$$

证明 令 $w = u_1 - u_2$, 则

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \\ w|_{t=T} = 0, & x \in [0, l], \\ w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, & t \in [0, T] \end{cases}$$

且

$$w_t|_{x=0} = 0, \quad w_t|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T].$$

记

$$e(t) = \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad t \in [0, T],$$

则

$$e(T) = 0.$$

将 $e(t)$ 对 t 求导我们得到

$$\begin{aligned} e'(t) &= 2 \int_0^l w w_t dx = 2a^2 \int_0^l w w_{xx} dx \\ &= -2a^2 \int_0^l w_x^2 dx. \end{aligned}$$

对 t 再求导我们得到

$$e''(t) = -4a^2 \int_0^l w_x w_{xt} dx = 4a^2 \int_0^l w_{xx} w_t dx$$

$$= 4a^4 \int_0^l w_{xx}^2 dx.$$

又由于

$$\begin{aligned} \int_0^l w_x^2 dx &= - \int_0^l w w_{xx} dx \\ &\leq \left(\int_0^l w^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l w_{xx}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} [e'(t)]^2 &\leq 4a^4 \left(\int_0^l w^2 dx \right) \left(\int_0^l w_{xx}^2 dx \right) \\ &= e(t)e''(t). \end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 记

$$e_\varepsilon(t) = e(t) + \varepsilon.$$

显然 $e_\varepsilon(t) \geq \varepsilon > 0$, 于是从上述不等式我们得到

$$[e'_\varepsilon(t)]^2 \leq e_\varepsilon(t)e''_\varepsilon(t).$$

令

$$f(t) = \ln e_\varepsilon(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

则

$$f''(t) = \frac{e_\varepsilon(t)e''_\varepsilon(t) - [e'_\varepsilon(t)]^2}{[e_\varepsilon(t)]^2} \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

因而 f 在区间 $[0, T]$ 上是凸函数. 于是对于任意 $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda T) \leq (1 - \lambda)f(0) + \lambda f(T),$$

即

$$e_\varepsilon(\lambda T) \leq e_\varepsilon(0)^{1-\lambda} e_\varepsilon(T)^\lambda.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则

$$e(\lambda T) \leq e(0)^{1-\lambda} e(T)^\lambda = 0.$$

由 λ 的任意性和 $w(x, t)$ 的连续性我们得到

$$w(x, t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

这就完成了证明.

*3.3.6 反向问题的不适定性

在上述内容中我们证明了热方程混合问题和初值问题的适定性, 即解的存在惟一性和稳定性. 从物理学的观点来看, 热传导过程是不可逆的. 因此与其逆过程相应的定解问题必定与上述的定解问题有本质的不同. 我们将构造一个例子说明这类的定解问题是不适定的.

假设有一根均匀细杆, 其侧表面绝热, 两段保持零度. 已知在 $t = T$ 时刻它的温度分布 $u(x, T) = \varphi(x)$, 希望求出 $t = T$ 之前的温度分布 $u(x, t)$. 事实上, 如果我们希望在 $t = T$ 时刻得到杆的一个理想的温度分布 $\varphi(x)$, 就需要知道如何控制杆在 $t = 0$ 时刻的初始温度分布来实现. 这样的问题称为热方程的**反向问题**. 此时相应于此热传导逆过程的数学问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u|_{t=T} = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.33)$$

从定理 3.7 我们知道, 若初值 $u(x, 0)$ 为一个连续函数时, 解 $u(x, t)$ 在区域 $Q = (0, l) \times (0, T]$ 上是无穷次可微的. 事实上, 可以证明解 $u(x, t)$ 关于 x 是解析的. 因此, 如果反向问题 (3.33) 的解存在, 则 $\varphi(x)$ 必须是解析函数. 换句话说, 若 $\varphi(x)$ 仅仅是连续函数, 则反向问题 (3.33) 的解肯定不存在. 更令人惊讶的是, 即使给定的 $\varphi(x)$ 是解析函数且反向问题 (3.33) 的解 $u(x, t)$ 存在, $u(x, t)$ 关于初值 $\varphi(x)$ 也是不稳定的. 也就是说, 初值 $\varphi(x)$ 的微小误差, 也可能引起解 $u(x, t)$ 的巨大改变. 而在实际问题中, $\varphi(x)$ 是测量数据, 因而测量误差是不可避免的.

下面我们用 Hadamard 的例子来说明此问题. 为简单起见我们设 $l = \pi, a = 1$. 令

$$u_k(x, T) = \varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

容易验证反向问题 (3.33) 的解是

$$u_k(x, t) = \frac{1}{k} e^{k^2(T-t)} \sin kx.$$

当 $k \rightarrow +\infty$ 时,

$$\max_{[0, \pi]} |\varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \rightarrow 0.$$

但是对于任意 $t < T$, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时,

$$\max_{[0, \pi]} u_k(x, t) = \frac{1}{k} e^{k^2(T-t)} \rightarrow +\infty.$$

这说明反向问题 (3.33) 在极大模意义下是不适定的. 然而, 当我们考虑控制问题时, 我们会遇到上述反向问题. 由于这样的反向问题 (3.33) 具有明确的实际意义, 因而我们不得不重新考虑这样的反向问题的适定性问题. 为了求解反向问题, 我们通常还要加一些适定化条件. 这些条件是对解本身所加的一种约束条件, 故在这些约束条件下我们仍然可以得到反向问题的适定性.

§ 3.4 习 题

1. 按定义求下列函数的 Fourier 变换:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ |x|, & |x| \leq a \end{cases} \quad (a > 0);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \leq a \end{cases} \quad (a > 0);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \sin \lambda_0 x, & |x| \leq a \end{cases} \quad (a > 0, \lambda_0 > 0);$$

$$(4) f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0);$$

$$(5) f(x) = \cos x e^{-a|x|} \quad (a > 0).$$

2. 利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ x^2, & |x| \leq a \end{cases} \quad (a > 0);$$

$$(2) f(x) = xe^{-a|x|} \quad (a > 0);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ e^{\mu x}, & |x| \leq a \end{cases} \quad (a \in \mathbf{R}_+, \mu \in \mathbf{R});$$

$$(4) f(x) = \sin \lambda_0 x e^{-a|x|} \quad (a > 0, \lambda_0 > 0);$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ e^{i\lambda_0 x}, & |x| \leq a \end{cases} \quad (a \in \mathbf{R}_+, \lambda_0 \in \mathbf{R});$$

$$(6) f(x) = e^{-ax^2+ibx+c} \quad (a \in \mathbf{R}_+, b, c \in \mathbf{R});$$

$$(7) f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0);$$

$$(8) f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0);$$

$$(9) f(x) = \frac{1}{(a^2 + x^2)^2} \quad (a > 0).$$

3. 求下列函数的 Fourier 逆变换:

$$(1) F(\lambda) = e^{-a^2 \lambda^2 t}, \text{ 其中 } t > 0 \text{ 为参数, } a > 0 \text{ 为常数};$$

$$(2) F(\lambda) = e^{(-a^2 \lambda^2 + ib\lambda + c)t}, \text{ 其中 } t > 0 \text{ 参数, } a \in \mathbf{R}_+, b, c \in \mathbf{R}$$

为常数;

$$(3) F(\lambda) = e^{-|\lambda|y}, \text{ 其中 } y > 0 \text{ 为参数}.$$

4. 利用 Fourier 变换求解下列定解问题:

$$(1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + bu_x + cu = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad \text{其中 } a \in$$

$\mathbf{R}^+, b, c \in \mathbf{R}$ 是常数;

$$(2) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad \text{其中 } \varphi(x) \text{ 连续有界, 求此}$$

问题的有界解.

5. 设 $\Phi(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda)$, 求下列函数的 Fourier 逆变换:

(1) $F(\lambda) = \Phi(\lambda) \cos a\lambda t$, 其中 $t > 0$ 为参数, $a > 0$ 为常数;

(2) $F(\lambda) = \Phi(\lambda) \frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}$, 其中 $t > 0$ 为参数, $a > 0$ 为常数.

6. 利用 Fourier 变换求解波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

其中 $a > 0$ 是常数.

7. 利用 Fourier 变换求解问题

$$-\Delta u + u = f, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

8. 利用 Fourier 变换求解 Schrödinger 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = f, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

9. 利用 Fourier 变换求解 Cahn-Hilliard 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = f, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

10. 假使 $u_1(s, t), u_2(s, t), \dots, u_n(s, t)$ 满足热方程 $u_t - a^2 u_{ss} = 0$, 则

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \prod_{k=1}^n u_k(x_k, t)$$

满足热方程

$$u_t - a^2 \Delta u = 0,$$

其中 a 为正常数, $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}$.

11. 假使 $u(x, t) \in C^3(\mathbf{R}_+^2)$ 满足热方程 $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ ($a > 0$), 则

(1) 对于任意 $\lambda \in \mathbf{R}$, $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ 满足热方程;

(2) 函数 $v(x, t) = xu_x + 2tu_t(x, t)$ 也满足热方程.

12. 求解拟线性抛物方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u + b|Du|^2 = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

其中 a 为正常数, b 为常数. (提示: 作 Hopf-Cole 变换 $w = e^{-\frac{bu}{a^2}}$)

13. 求解粘性 Burgers 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + uu_x = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

其中 a 为常数. (提示: 作函数变换 $v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(y, t) dy$, 将问题化为上一问题)

14. 求解拟线性抛物方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \frac{U''(u)}{U'(u)} |Du|^2 = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

其中 $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个光滑函数且 $U' > 0$. (提示: 作函数变换 $v(x, t) = U[u(x, t)]$)

15. 求解拟线性抛物方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u)|Du|^2 = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

其中 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个光滑函数.

16. 利用 Poisson 公式 (3.9) 证明 Weierstrass 逼近定理, 即多项式在 $C([0, 1])$ 上是稠密的. (提示: 对给定 $\varphi \in C([0, 1])$, 延拓 φ 到 $\mathbf{R}$ 上, 求解初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

其求解步骤如下: (1) 证明当 $t \rightarrow 0$ 时, $u(x, t)$ 一致地收敛到 $\varphi(x)$; (2) 将 $u(x, t)$ 用基本解 $K(x, t)$ 表示出来; (3) 用多项式逼近基本解 $K(x, t)$)

17. 利用 Poisson 公式 (3.9) 推导半无界问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = g(t), & t > 0 \end{cases}$$

的显式解

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s) ds,$$

其中 $g(0) = 0$. (提示: 令 $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$, 然后把 $v(x, t)$ 奇延拓到 $x < 0$, 再利用 Poisson 公式求解)

18. 设 a 为正常数, A_1, A_2 为常数. 用分离变量法求解下列混合问题:

$$(1) \begin{cases} u_t - u_{xx} = u, & 0 < x \leq \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x \leq \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = x^2(l-x)^2, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x \leq \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = A_1 t, u_x(\pi, t) = A_2 t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = x(\pi - x), & 0 < x \leq \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = -1, & t \geq 0. \end{cases}$$

19. 设 $a > 0$ 为常数. 求下列混合问题的 Green 函数:

$$(1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t), & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = g_1(t), u_x(l, t) = g_2(t), & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -u_x(0, t) + u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

20. 设 $a > 0$ 为常数. 利用上面混合问题的 Green 函数求解下列问题:

$$(1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t), & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = g_1(t), u_x(l, t) = g_2(t), & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -u_x(0, t) + u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

21. 设有长度为 l , 两端绝热的均匀细杆, 其初始温度为 $\varphi(x)$.

考虑下列两种情形:

(1) 侧表面绝热;

(2) 侧表面与周围介质发生热交换, 且介质温度为常温 u_0 . 分别在上述两种情形下求杆上的温度分布 $u(x, t)$, 并求 $t \rightarrow +\infty$ 时杆上的温度的极限分布.

22. 设有两段均匀且截面相同的细杆, 两段杆的特性常数分别为 c_1, ρ_1, k_1 和 c_2, ρ_2, k_2 , 长度分别为 l_1 和 l_2 . 将它们连接成一组杆. 设组合杆的初始温度为 $\varphi(x)$, 组合杆两端保持零度, 侧表面绝热. 试求组合杆上的温度分布. (提示: 设两段杆的温度分布分别为 u_1 和 u_2 , 则在连接处满足条件 $u_1 = u_2, k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$)

23. 证明附注 3.3.

24. 证明定理 3.7 和定理 3.7'.

25. 若 $v \in C^{2,1}(\Omega_T)$ 满足

$$v_t - a^2 \Delta v \leq 0, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

称 v 在 Ω_T 上是热方程的下解, 其中 $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, $a > 0$ 为常数.

(1) 证明:

$$\max_{\Omega_T} v(x, t) = \max_{\partial_p \Omega_T} v(x, t).$$

(2) 设 $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是光滑凸函数且 u 在 Ω_T 上满足热方程. 证明: $v = \phi(u)$ 在 Ω_T 上是热方程的下解.

(3) 设 u 在 Ω_T 上满足热方程. 证明: $v = a^2 |Du|^2 + u_t^2$ 在 Ω_T 上是热方程的下解.

在以下各题中, 假设区域 $Q_T = \{(x, t) | 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, $\Gamma = \partial_p Q_T$ 是抛物边界.

26. 假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 是热方程

$$u_t - u_{xx} = u, \quad (x, t) \in Q_T$$

的非负解. 假设存在正数 $M > 0$, 使得

$$u|_{\Gamma} \leq M.$$

证明:

$$u(x, t) \leq Me^t, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

(提示: 考虑 $w = e^{-t}u$ 满足的定解问题)

27. 设 $\mathcal{L}u = u_t - u_{xx} + |u_x|$. 证明对于算子 $\mathcal{L}$, 比较原理成立, 即设 $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, 当 $\mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v, u|_{\Gamma} \leq v|_{\Gamma}$ 时, 则在 $\bar{Q}_T$ 上 $u(x, t) \leq v(x, t)$.

28. 设 $\mathcal{L}u = u_t - u_{xx} + u^3$. 证明对于算子 $\mathcal{L}$, 比较原理成立.

(提示: 考虑 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ 满足的定解问题)

29. 假设 $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T), u_t \in C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

则

$$\max_{\bar{Q}_T} |u_t(x, t)| \leq C(\|f\|_{C^1(\bar{Q}_T)} + \|\varphi''\|_{C[0, l]}),$$

其中 C 仅依赖于 T .

30. 假设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

则

$$(1) \max_{(0, T)} |u_x(0, t)| \leq C, \quad \max_{(0, T)} |u_x(l, t)| \leq C, \quad \text{其中 } C \text{ 仅依赖于}$$

$$\|\varphi\|_{C^1[0, l]};$$

$$(2) \text{ 设 } u_x \in C^{2,1}(Q_T), \text{ 则 } \max_{\bar{Q}_T} |u_x(x, t)| \leq \tilde{C}, \text{ 其中 } \tilde{C} \text{ 也仅依赖于}$$

$$\|\varphi\|_{C^1[0, l]}.$$

31. 假设 $u, u_x \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ [-u_x + \alpha u]|_{x=0} = g_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ [u_x + \beta u]|_{x=l} = g_2(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. 试给出 $\max_{\bar{Q}_T} |u_x|$ 的估计.

32. 记 $Q_T^l = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, 并设 $u^l \in C(\bar{Q}_T^l) \cap C^{2,1}(Q_T^l)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t^l - u_{xx}^l = 0, & (x, t) \in Q_T^l, \\ u^l(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u^l(0, t) = g(t), \quad u^l(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 $g(t) \geq 0$. 证明: $u^l(x, t)$ 关于 l 是递增的, 即对于 $l_1 < l_2$,

$$u^{l_1}(x, t) \leq u^{l_2}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T^{l_1}.$$

33. 设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ [u_x + h(u_0 - u)]|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 h, u_0 为正常数. 证明:

(1) $0 \leq u(x, t) \leq u_0, (x, t) \in Q_T$;

(2) $u = u_h(x, t)$ 关于 h 单调递增.

34. 假设 $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -u^2 + bu, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 $b = b(x, t) \in C(\bar{Q}_T), \varphi \in C[0, l], \varphi(x) \geq 0$. 证明:

$$0 \leq u(x, t) \leq M \max_{0 \leq x \leq l} \varphi(x),$$

其中 M 只依赖于 $T, \max_{\bar{Q}_T} |b(x, t)|$.

35. 证明: 初值问题

$$\begin{cases} u_t - a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

的有界解是惟一的, 其中 $a(x, t) \geq a_0 > 0, c(x, t) \geq 0$, 且 $a(x, t), b(x, t)$ 和 $c(x, t)$ 有界. (提示: 首先在区域 $Q_T^L = (-L, L) \times (0, T]$ 上证明比较原理成立, 然后考虑辅助函数 $w = \frac{M}{L^2} e^t(x^2 + 2At + B^2)$,

其中 $|u(x, t)| \leq M, |a(x, t)| \leq A, |b(x, t)| \leq B$)

36. 假设 $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

证明:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l u_x^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^l u_t^2(x, t) dx dt \\ & \leq 2 \left\{ \int_0^l [\varphi'(x)]^2 dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right\}. \end{aligned}$$

37. 假设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ [-u_x + \alpha u]|_{x=0} = [u_x + \beta u]|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 $a > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 为常数. 证明:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l u^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq M \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right], \end{aligned}$$

其中 M 只依赖于 T 和 a .

38. 假设 $u \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 且满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 a 为正常数. 证明:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^l u^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ & \leq M \left[\int_0^l \varphi^2(x) dx + \int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt \right], \end{aligned}$$

其中 M 只依赖于 T, a, B 和 $C, B = \sup\{|b(x, t)|\}, C = \sup\{|c(x, t)|\}$ 是非负常数.

第四章 波动方程

本章讨论波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f, \quad (4.1)$$

其中 $u = u(x, t), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, t > 0; a > 0$ 是常数, $f = f(x, t)$ 是已知函数.

在本章第一节中我们首先利用特征线法求解出一维波动方程初值问题的解的表达式——D'Alembert 公式, 接着求解一维波动方程半无界问题, 最后利用球平均法和降维法求解出三维波动方程和二维波动方程初值问题的解的表达式——Kirchhoff 公式和 Poisson 公式, 从而得到一维、二维和三维波动方程初值问题的解的存在性. 与此同时, 我们将介绍波动方程最重要的概念——特征线 (特征锥), 推导波动方程的最基本的先验估计——能量不等式, 从而得到波动方程初值问题的解的惟一性和稳定性. 这样我们就证明了波动方程初值问题的适定性. 在第二节中我们首先利用分离变量法来求解出一维波动方程混合问题的解的表达式, 得到一维波动方程混合问题的解的存在性, 并解释一些有趣的物理现象; 然后我们推导波动方程混合问题的能量不等式, 从而得到一维波动方程混合问题的解的惟一性和稳定性; 最后, 在能量守恒律的框架下我们介绍波动方程混合问题的广义解, 讨论广义解的存在性、惟一性和稳定性问题, 从而基本上回答波动方程混合问题在更大的函数空间上的适定性问题.

波动方程是偏微分方程中一类重要的方程, 可以从许多具有物理意义的模型得到. 实际上, 波动方程是关于振动的弦 ($n = 1$)、薄膜 ($n = 2$) 和弹性体 ($n = 3$) 的二阶偏微分方程. 在此我们简略地推导一下.

通常让 $u = u(x, t)$ 表示物体 Ω 在时刻 t , 点 x 在某个方向的位移. 令 V 为 Ω 内的任何光滑区域, 考虑它在任意时段 $[t_1, t_2]$ 动量的变化. 由动量守恒律我们知道, V 在时段 $[t_1, t_2]$ 动量的变化, 也即 V 在时刻 t_2 的动量与它在时刻 t_1 的动量之差等于通过其边界 ∂V 作用于 V 的弹性内力在时段 $[t_1, t_2]$ 产生的冲量与作用于 V 的外力在时段 $[t_1, t_2]$ 产生的冲量之和. 设 $\rho = \rho(x)$ 表示物体在点 $x \in \Omega$ 的密度, $\mathbf{F}$ 表示物体通过边界 ∂V 作用于 V 的弹性内力密度, $f_0 = f_0(x, t)$ 表示作用于 V 的外力密度 (例如重力密度). 动量守恒律用数学语言表达, 为

$$\begin{aligned} & \int_V (\rho u_t)|_{t=t_2} dx - \int_V (\rho u_t)|_{t=t_1} dx \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V f_0 dx dt, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 ∂V 的单位外法向量. 上式右端第一项取如此形式是因为只有法方向的弹性内力对物体产生拉伸作用.

利用 Gauss-Green 公式我们得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V (\rho u_t)_t dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V f_0 dx dt.$$

由于区域 V 和时段 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 我们有

$$(\rho u_t)_t + \operatorname{div} \mathbf{F} = f_0.$$

假设弹性体是均匀的, 即密度 $\rho = \rho_0$ 为常数. 此时 $\mathbf{F}$ 是位移 u 的梯度 Du 的函数, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(Du).$$

对于小位移 u 和小位移梯度 Du 的情形, 可合理地假设

$$\mathbf{F} = -T_0 Du,$$

其中 T_0 表示弹性内力强度. 简化上述方程得到

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f,$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad f = \frac{f_0}{\rho_0}.$$

至此我们推导出方程 (4.1).

求解一个用偏微分方程描述的实际问题, 一般来说只知道方程是不够的, 还需要提适当的附加条件. 为了求解方程 (4.1), 我们需要提适当的初始条件和边值条件:

初始条件 给出弹性体各点在初始时刻 $t = 0$ 的位移和速度, 即

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 是已知函数.

边值条件 给出弹性体边界点在时间 $t > 0$ 的状态, 如位移或受力情况, 通常有如下三类:

(1) 已知边界点的位移变化

$$u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

当 $g(x, t) \equiv 0$ 时, 表示弹性体边界 $\partial\Omega$ 固定.

(2) 已知边界点的受力情况

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 当 $g(x, t) \equiv 0$ 时, 表示无外力通过边界 $\partial\Omega$ 对弹性体作用, 此时 $\partial\Omega$ 处于自由状态.

(3) 已知边界点的位移与所受外力的线性组合

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x, t) + \alpha(x, t) u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

其中 $\alpha(x, t) > 0$, $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 当 $g(x, t) \equiv 0$ 时, 表示弹性体的边界 $\partial\Omega$ 固定在弹性支撑上.

另外, 应该注意到上述波动方程的初始条件和边值条件与上一章热方程的初始条件和边值条件既有相同之处又有不同之处.

§ 4.1 初值问题

在这一节中我们将考虑实际问题的理想模型: 一根无端点的无限长的弦, 一张无限大无边界的薄膜, 一个充满整个空间的弹性体. 由于这些区域没有边界, 因此我们只需要对波动方程提初始条件, 而不需要提边值条件, 从而可以极大地简化波动方程定解问题的求解. 这样的定解问题通常称为 **Cauchy 初值问题**. 通过波动方程初值问题的解的表达式, 我们将发现波动方程的最基本的特征——扰动的传播速度有限.

4.1.1 问题的简化

我们考虑如下 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (4.6)$$

初值问题 (4.6) 是线性的, 我们可以将它一分为三, 以简化问题的求解. 它们分别是

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 - a^2 \Delta u_1 = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_1(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 - a^2 \Delta u_2 = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ u_2(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_2(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3 - a^2 \Delta u_3 = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ u_3(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_3(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (4.9)$$

由线性叠加原理知道

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \quad (4.10)$$

是初值问题 (4.6) 的解. 实际上, 由后面的惟一性定理知道初值问题 (4.6) 的解必定可表示为上述形式.

为求解初值问题 (4.6), 我们指出求解初值问题 (4.8) 是基本的. 事实上, 其他两个初值问题 (4.7) 和 (4.9) 的解可以通过初值问题 (4.8) 的解表示出来.

定理 4.1 设 $u_2 = M_\psi(x, t)$ 是初值问题 (4.8) 的解 (这里 M_ψ 表示以 ψ 为初速度的初值问题 (4.8) 的解), 则初值问题 (4.7), (4.9) 的解 u_1, u_3 可分别表为

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, t), \quad (4.11)$$

$$u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau, \quad (4.12)$$

这里 $f_\tau = f(x, \tau)$, 并且假定 $M_\varphi(x, t)$ 和 $M_{f_\tau}(x, t - \tau)$ 分别在区域 $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 和 $\mathbf{R}^n \times [\tau, \infty)$ 上对变量 x, t 和 τ 充分光滑.

证明 我们先证公式 (4.11). 由于 M_φ 满足初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}M_\varphi = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ M_\varphi(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \\ \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

因此我们得到

$$\mathcal{L}u_1 = \mathcal{L}\frac{\partial}{\partial t}M_\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}M_\varphi = 0,$$

从而证明了 u_1 满足定解问题 (4.7) 的方程. 显然

$$u_1(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(x, 0) = \varphi(x).$$

又由于 M_φ 在区域 $\mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ 上对变量 x, t 充分光滑, 因而在初始时刻 $t = 0$ 也满足方程 $\mathcal{L}M_\varphi = 0$, 因此

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1(x, 0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_\varphi(x, 0) = a^2\Delta M_\varphi(x, 0) = 0.$$

这样我们证明了 u_1 满足初值问题 (4.7) 的初始条件.

接着我们证明公式 (4.12). 由于 $M_{f_\tau}(x, t)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}M_{f_\tau} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ M_{f_\tau}(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \\ \frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x, 0) = f(x, \tau), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

由算子 $\mathcal{L}$ 的平移不变性我们知道 $w = M_{f_\tau}(x, t - \tau)$ 是定解问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^n \times (\tau, +\infty), \\ w|_{t=\tau} = 0, & x \in \mathbf{R}^n, \\ w_t|_{t=\tau} = f(x, \tau), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

的解. 从 u_3 的表达式我们进一步得到

$$u_3(x, 0) = 0$$

和

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = M_{f_\tau}(x, t - \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau,$$

因而

$$\frac{\partial}{\partial t}u_3(x, 0) = 0.$$

这样我们证明了 u_3 满足初值问题 (4.9) 的初始条件. 又由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}M_{f_\tau}(x, t - \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \int_0^t \Delta M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \Delta \int_0^t M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + a^2 \Delta u_3, \end{aligned}$$

这样我们证明了 u_3 满足初值问题 (4.9) 的方程. 于是我们就完成了定理的证明.

附注 4.1 表达式 (4.12) 可以写成和的极限, 即

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_{f_{t_i}}(x, t - t_i) \Delta t_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_{f_{t_i} \Delta t_i}(x, t - t_i), \end{aligned}$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta t_i$,

$f_{t_i} = f(x, t_i)$. 实际上, 和式中的每一项表示在时间段 $[t_i, t_{i+1}]$ 内, 外力 f_{t_i} 作用于弹性体的冲量 $f_{t_i} \Delta t_i$ 转化为瞬时初速度 $f_{t_i} \Delta t_i$ 而引起的弹性体的位移. 将非齐次方程的初值问题 (4.9) 的解表示为一系列具有初速度的齐次方程的初值问题 (4.7) 的解的叠加, 这种求

解过程通常称之为 Duhamel 原理.

4.1.2 一维初值问题

我们首先考虑空间维数 $n = 1$ 时的波动方程初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (4.13)$$

我们将利用特征线法给出其解的表达式. 为了求出初值问题 (4.13) 的解的表达式, 由定理 4.1 的结论, 我们只需求解下列初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (4.14)$$

由于微分算子 $\mathcal{L}$ 可以分解为两个一阶算子的乘积, 即

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

因而可以把初值问题 (4.14) 的方程分解成两个如下的一阶方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4.16)$$

由初值问题 (4.14) 的初始条件, 我们得到 u, v 在 $t = 0$ 时的初始条件

$$u(x, 0) = 0 \quad (4.17)$$

和

$$v(x, 0) = u_t(x, 0) - au_x(x, 0) = \psi(x). \quad (4.18)$$

于是我们把初值问题 (4.14) 分解为两个一阶方程的初值问题 (4.15), (4.17) 和 (4.16), (4.18).

定义 4.1 称常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{dx}{dt} = a$$

的解分别为一阶偏微分方程 (4.15), (4.16) 的特征线 (见图 4.1).

对于方程 (4.16), 它的特征线为

$$x = x_1(t) = c + at,$$

这里 c 为任意常数. 对于任意一点 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, 过 (x_0, t_0) 的特征线为

$$x_1(t) = x_0 - at_0 + at.$$

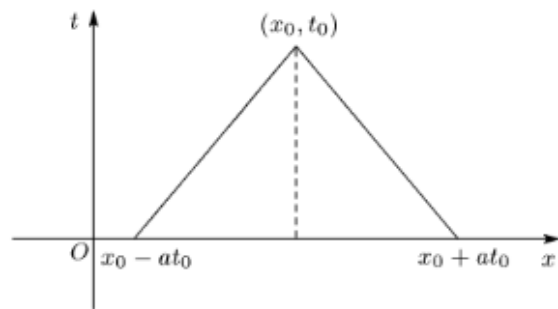


图 4.1

在此特征线上, 方程 (4.16) 具有形式

$$\frac{dv(x_1(t), t)}{dt} = 0.$$

因此, 函数 $v(x, t)$ 在此特征线上为常数. 特别地, 由初值条件 (4.18) 我们得到

$$\begin{aligned} v(x_0, t_0) &= v[x_1(t_0), t_0] = v(x_0 - at_0, 0) \\ &= \psi(x_0 - at_0). \end{aligned}$$

于是对于任意 $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, 有

$$v(x, t) = \psi(x - at). \quad (4.19)$$

对于方程 (4.15), 它的特征线为

$$x = x_2(t) = c - at,$$

这里 c 为任意常数. 特别地, 过点 (x_0, t_0) 的特征线为

$$x_2(t) = x_0 + at_0 - at.$$

在此特征线上, 注意到 $v(x, t)$ 的表达式 (4.19), 则方程 (4.15) 具有形式

$$\begin{aligned}\frac{du(x_2(t), t)}{dt} &= v[x_2(t), t] = \psi[x_2(t) - at] \\ &= \psi(x_0 + at_0 - 2at).\end{aligned}$$

因此, 利用初始条件 (4.17) 我们得到

$$\begin{aligned}u(x_0, t_0) &= u[x_2(t_0), t_0] \\ &= \int_0^{t_0} \psi(x_0 + at_0 - 2a\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

于是我们获得初值问题 (4.14) 的解的表达式

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

利用定理 4.1 中的表达式 (4.11) 和 (4.12), 我们得到了初值问题 (4.13) 有如下形式的解:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau.\end{aligned}$$

简化得到

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi.\end{aligned}\quad (4.20)$$

特别地, 当 $f \equiv 0$ 时, 上述表达式称为 **D'Alembert 公式**.

当然我们也可以不用定理 4.1 而直接用特征线法来求解初值问题 (4.13). 具体来说, 把初值问题 (4.13) 的方程分解成两个如下的一阶方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = f,$$

其中 u, v 分别满足初值条件

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

和

$$v(x, 0) = u_t(x, 0) - au_x(x, 0) = \psi(x) - a\varphi'(x).$$

先通过特征线簇 $x_1(t)$ 求解出 $v(x, t)$, 然后再通过特征线簇 $x_2(t)$ 求解出 $u(x, t)$. 这样对于初值问题 (4.13), 我们也可以得到同样的公式 (4.20). 具体细节我们留给读者作为练习.

附注 4.2 从 D'Alembert 公式我们知道, 当 $f \equiv 0$ 时, 初值问题 (4.13) 的解可以表示成如下形式:

$$u(x, t) = F(x+at) + G(x-at).$$

例如, 我们可以选取

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{2} \varphi(s) + \frac{1}{2a} \int_0^s \psi(\xi) d\xi, \\ G(s) &= \frac{1}{2} \varphi(s) - \frac{1}{2a} \int_0^s \psi(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

这里函数 $F(x+at)$ 和 $G(x-at)$ 分别称为**左行波**和**右行波**. 此时初值问题 (4.13) 的解可以分解成左行波和右行波的叠加.

直到现在, 表达式 (4.20) 只是给出初值问题 (4.13) 的形式解. 为了使表达式 (4.20) 确实是初值问题 (4.13) 的古典解, 我们需要对初值问题 (4.13) 中方程的非齐次项 f 和初值 φ, ψ 提适当的光滑性条件.

定理 4.2 若 $\varphi \in C^2(\mathbf{R})$, $\psi \in C^1(\mathbf{R})$ 及 $f \in C^1(\mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, 则由表达式 (4.20) 给出的函数 $u \in C^2(\mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$, 且是初值问题 (4.13) 的解.

证明留作习题.

推论 4.3 若 φ, ψ 及 f 是 x 的偶 (或奇, 或周期为 l 的) 函数, 则由表达式 (4.20) 给出的解 u 必是 x 的偶 (或奇, 或周期为 l 的) 函数.

证明留作习题.

4.1.3 一维半无界问题

在这一小节中我们求解半无界问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \bar{\mathbf{R}}_+, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \bar{\mathbf{R}}_+, \\ u(0, t) = g(t), & t \in \bar{\mathbf{R}}_+. \end{cases} \quad (4.21)$$

我们分别考虑齐次边值情形和非齐次边值情形.

1. 齐次边值情形 $g(t) \equiv 0$

求解半无界问题的基本思想方法是把定解问题的初值 $\varphi(x), \psi(x)$ 和非齐次项 $f(x, t)$ 延拓到整个实数轴上, 将问题化为一个 Cauchy 初值问题, 利用上一小节已知的结论得到在整个实数轴上 Cauchy 初值问题的解, 同时使得这样构造出来的解 u 在 $x = 0$ 上自然地满足齐次边值条件

$$u(0, t) = 0. \quad (4.22)$$

将这样的解限制在区域 $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+$ 上就得到半无界问题 (4.21) 的解.

附注 一个定义在整个实数轴上的函数 $w(x)$, 如果它是连续的奇函数, 即 $w(-x) = -w(x)$, 则必有 $w(0) = 0$; 如果它是一次连续可微的偶函数, 即 $w(-x) = w(x)$, 则必有 $w'(0) = 0$.

从推论 4.3 我们知道, 假如初值和非齐次项在整个实数轴上是 x 的奇函数, 则相应的 Cauchy 初值问题的解必是 x 的奇函数. 因此我们将半无界问题 (4.21) 的初值 $\varphi(x), \psi(x)$ 和非齐次项 $f(x, t)$ 奇延拓到整个实数轴上, 使得延拓后的初值 $\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)$ 和非齐次项 $\bar{f}(x, t)$ 是 x 的奇函数. 为此, 我们定义

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \\ \bar{\psi}(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0; \end{cases} \\ \bar{f}(x, t) &= \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0, \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

显然初值 $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ 和非齐次项 $\bar{f}$ 是 x 的奇函数.

我们首先求解 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}\bar{u} = \bar{f}(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{\varphi}(x), & x \in \mathbf{R}, \\ \bar{u}_t(x, 0) = \bar{\psi}(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

从 Cauchy 初值问题解的表达式 (4.20) 知, 上述初值问题的解可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \frac{1}{2}[\bar{\varphi}(x+at) + \bar{\varphi}(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \bar{f}(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

由推论 4.3, 我们知道 $\bar{u}(x, t)$ 是 x 的奇函数. 令 $u = \bar{u}|_{\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+}$, 显然是半无界问题 (4.21) 的解. 在 $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+$ 上, 从 $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{f}$ 的定义, 解 $u(x, t)$ 可以进一步表示为下列形式:

我们可以直接利用公式 (4.23) 和 (4.24) 证明此定理, 但比较繁琐. 若利用已知的关于 Cauchy 初值问题的可微性结果, 可使证明简单一些. 在这里我们略去具体过程.

2. 非齐次边值情形 $g(t) \neq 0$

作函数替换

$$u(x, t) = v(x, t) + g(t), \quad (4.28)$$

我们从半无界问题 (4.21) 得到 $v(x, t)$ 在区域 $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+$ 上适合以下齐次边值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \mathcal{L}u - \mathcal{L}g(t) = f(x, t) - g''(t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ v(x, 0) = \varphi(x) - g(0), & x \in \bar{\mathbf{R}}_+, \\ v_t(x, 0) = \psi(x) - g'(0), & x \in \bar{\mathbf{R}}_+, \\ v(0, t) = 0, & t \in \bar{\mathbf{R}}_+. \end{cases}$$

因此 $v(x, t)$ 可以通过表达式 (4.23) 和 (4.24) 给出. 回到函数替换 (4.28), 我们同样可以给出半无界问题 (4.21) 的解的表达式.

根据定理 4.3, 立即得到如下的结论.

定理 4.4 若半无界问题 (4.21) 的初值 $\varphi(x) \in C^2(\bar{\mathbf{R}}_+)$, $\psi(x) \in C^1(\bar{\mathbf{R}}_+)$, 非齐次项 $f(x, t) \in C^1(\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ 和边值 $g(t) \in C^3(\bar{\mathbf{R}}_+)$ 满足相容性条件

$$\varphi(0) = g(0), \quad \psi(0) = g'(0), \quad g''(0) - a^2 \varphi''(0) = f(0, 0),$$

则半无界问题 (4.21) 有解 $u \in C^2(\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+)$.

附注 4.3 在半无界问题 (4.21) 中, 若在边界 $x = 0$ 上给定第二边值条件

$$u_x(0, t) = g(t),$$

则可以作函数变换

$$u(x, t) = xg(t) + v(x, t),$$

把 $x = 0$ 上的边值条件化为齐次边值条件

$$v_x(0, t) = 0.$$

然后利用对称开拓法, 把相应的初值 φ, ψ 和非齐次项 f 关于 x 进行偶开拓, 就可求得解 $v(x, t)$ 的表达式, 从而得到 $u(x, t)$ 的表达式. 如果再对初值 φ, ψ , 边值 g 和非齐次项 f 提适当的光滑性要求, 且在定解区域的角点 $(0, 0)$ 提适当的相容性条件, 就可证明得到的 $u(x, t)$ 确实是相应的半无界问题 (4.21) 的解.

4.1.4 多维初值问题

在这一小节中, 我们先用球面平均法求解空间维数 $n = 3$ 时的 Cauchy 初值问题, 然后利用降维法求解空间维数 $n = 2$ 时的 Cauchy 初值问题.

1. 三维问题

我们考虑空间维数 $n = 3$ 时波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^3. \end{cases} \quad (4.29)$$

由定理 4.1, 我们只需求解初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \quad (4.30)$$

就可得到初值问题 (4.29) 的解的表达式. 我们这里介绍球面平均法来求出初值问题 (4.30) 的解 $u(x, t)$.

固定 $x \in \mathbf{R}^3$. 对任意 $r > 0, t > 0$, 定义

$$\begin{aligned} U(r, t) &= \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y) \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz, t) \, dS(z), \end{aligned}$$

其中积分号 $\oint$ 表示在积分区域上求平均值. 我们计算函数 $U(r, t)$ 对 r 的偏导数得

$$\begin{aligned} U_r(r, t) &= \oint_{\partial B(0,1)} Du(x + rz, t) \cdot z \, dS(z) \\ &= \oint_{\partial B(x,r)} Du(y, t) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) \\ &= \oint_{\partial B(x,r)} Du(y, t) \cdot \mathbf{n} \, dS(y), \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示球面 $\partial B(x, r)$ 的单位外法向量. 利用 Gauss-Green 公式和初值问题 (4.30) 的方程, 我们得到

$$\begin{aligned} U_r(r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) \, dy \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 r^2} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y, t) \, dy, \end{aligned}$$

于是

$$a^2 r^2 U_r(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y, t) \, dy.$$

两边对 r 求偏导数得

$$\begin{aligned} a^2 [r^2 U_r(r, t)]_r &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y, t) \, dS(y) \\ &= r^2 \left[\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y, t) \, dS(y) \right]_{tt}. \end{aligned}$$

由函数 $U(r, t)$ 的定义上式即为

$$r^2 U_{tt} = a^2 (r^2 U_r)_r,$$

化简后得到

$$(rU)_{tt} = a^2 \frac{1}{r} (r^2 U_r)_r = a^2 (rU)_{rr}.$$

对任意 $r > 0, t > 0$, 定义

$$\tilde{U}(r, t) = rU(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x,r)} u(y, t) \, dS(y),$$

$$\tilde{\Psi}(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x,r)} \psi(y) \, dS(y).$$

假设 u 是二次连续可微函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \tilde{U}(r, t) = 0.$$

因而函数 $\tilde{U}$ 满足半无界问题

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - a^2 \tilde{U}_{rr} = 0, & (r, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ \tilde{U}(r, 0) = 0, & r \in \mathbf{R}_+, \\ \tilde{U}_t(r, 0) = \tilde{\Psi}(r), & r \in \mathbf{R}_+, \\ \tilde{U}(0, t) = 0, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases} \quad (4.31)$$

从半无界问题的解的表达式 (4.24) 知, 当 $0 < r \leq at$ 时, 上述方程的解可表达成

$$\tilde{U}(r, t) = \frac{1}{2a} \int_{at-r}^{r+at} \tilde{\Psi}(s) \, ds,$$

由定义我们得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\tilde{U}(r, t)}{r} \\ &= \frac{1}{2a} \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{1}{r} \int_{at-r}^{r+at} \tilde{\Psi}(s) \, ds \\ &= \frac{1}{a} \tilde{\Psi}(at) \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial B(x, at)} \psi(y) \, dS(y). \end{aligned} \quad (4.32)$$

由定理 4.1 知, 我们可以求得初值问题 (4.29) 的解的表达式如下:

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial B(x, at)} \varphi(y) dS(y) \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\partial B(x, at)} \psi(y) dS(y) \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{\partial B(x, a(t-\tau))} f(y, \tau) dS(y) d\tau. \end{aligned}$$

简化后得到

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_{\partial B(x, at)} \varphi(y) dS(y) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_{\partial B(0, 1)} \varphi(x + atz) dS(z) \right] \\ &= \int_{\partial B(0, 1)} \varphi(x + atz) dS(z) + t \int_{\partial B(0, 1)} D\varphi(x + atz) \cdot az dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x, at)} \varphi(y) dS(y) + \int_{\partial B(x, at)} D\varphi(y) \cdot (y - x) dS(y) \end{aligned}$$

和

$$u_3 = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B(x, at)} \frac{f(y, t - |y - x|/a)}{|y - x|} dy,$$

于是我们得到初值问题 (4.29) 的解的表达式

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B(x, at)} [\varphi(y) + D\varphi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)] dS(y) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B(x, at)} \frac{f(y, t - |y - x|/a)}{|y - x|} dy. \end{aligned}$$

特别地, 当 $f(x, t) \equiv 0$ 时, 上述表达式称为 **Kirchhoff 公式**. 通过直接验证我们可以得到下面关于三维初值问题 (4.29) 的解的存在性结论.

定理 4.5 若 $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^3)$, $\psi \in C^1(\mathbf{R}^3)$ 及 $f \equiv 0$, 则由 Kirchhoff 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B(x, at)} [\varphi(y) + D\varphi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)] dS(y) \quad (4.33)$$

给出的函数 $u \in C^2(\mathbf{R}^3 \times [0, +\infty))$, 且是初值问题 (4.29) 的解.

2. 二维问题

现在我们考虑空间维数 $n = 2$ 的情形, 求出 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^2, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^2 \end{cases} \quad (4.34)$$

的解 $u(x, t)$, 其中 $x = (x_1, x_2)$.

我们将利用降维法来求解问题. 具体来说, 我们将二维问题看成一个特殊的三维问题, 利用关于三维问题的结论来得到二维问题的解的表达式. 为此记 $\tilde{x} = (x, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, 同时定义

$$\tilde{f}(\tilde{x}, t) = f(x, t), \quad \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x), \quad \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(x).$$

我们首先来求出三维初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - a^2(\tilde{u}_{x_1x_1} + \tilde{u}_{x_2x_2} + \tilde{u}_{x_3x_3}) = \tilde{f}, & (\tilde{x}, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbf{R}^3, \\ \tilde{u}_t(\tilde{x}, 0) = \tilde{\psi}(\tilde{x}), & \tilde{x} \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \quad (4.35)$$

的解 $\tilde{u}(\tilde{x}, t)$. 如果 $u(x, t)$ 是初值问题 (4.34) 的解, 则它一定是初值问题 (4.35) 的解. 由于初值问题 (4.34) 的解的惟一性 (将在后面讨论), 则

$$u(x, t) = \tilde{u}(\tilde{x}, t) = \tilde{u}(\bar{x}, t), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, 0).$$

记 $\tilde{B}(\bar{x}, r)$ 为以 $\bar{x}$ 为心, r 为半径的三维球. 我们利用三维初值问题 (4.35) 的解的表达式得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial \tilde{B}(\bar{x}, at)} [\tilde{\varphi}(\tilde{y}) + D\varphi(\tilde{y}) \cdot (\tilde{y} - \bar{x}) + t\tilde{\psi}(\tilde{y})] dS(\tilde{y}) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\tilde{B}(\bar{x}, at)} \frac{f(\tilde{y}, t - |\tilde{y} - \bar{x}|/a)}{|\tilde{y} - \bar{x}|} d\tilde{y}. \end{aligned}$$

记 $B(x, at)$ 表示以 x 为心, 半径为 at 的圆盘, 并记上述等式右端的第一项为 $u_1(x, t)$, 第二项为 $u_2(x, t)$, 我们得到

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi at} \int_{B(x, at)} \frac{[\varphi(y) + D\varphi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)]}{\sqrt{(at)^2 - |y - x|^2}} dy, \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_{\partial B(\bar{x}, r)} \frac{f(\tilde{y}, t - r/a)}{r} dS(\tilde{y}) dr \\ &= \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{at} \int_{B(x, r)} \frac{f(y, t - r/a)}{\sqrt{r^2 - |y - x|^2}} dy dr \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{B(x, a(t-\tau))} \frac{f(y, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |y - x|^2}} dy d\tau. \end{aligned}$$

记 $C(x, t) = \{(y, \tau) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \tau \leq t, |y - x| \leq a(t - \tau)\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中以 (x, t) 为顶点, 圆盘 $\{(y, 0) : |y - x| \leq at\}$ 为底面的锥. 于是, 我们得到二维初值问题 (4.34) 的解的表达式

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) \\ &= \frac{1}{2\pi at} \int_{B(x, at)} \frac{[\varphi(y) + D\varphi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)]}{\sqrt{(at)^2 - |y - x|^2}} dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a} \iint_{C(x, t)} \frac{f(y, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |y - x|^2}} dy d\tau. \end{aligned}$$

特别地, 当 $f(x, t) \equiv 0$ 时, 上述表达式称为 **Poisson 公式**. 直接验证我们得到下面关于二维初值问题 (4.34) 的解的存在性结论.

定理 4.6 若 $\varphi \in C^3(\mathbf{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbf{R}^2)$ 及 $f \equiv 0$, 则由 Poisson 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi at} \int_{B(x, at)} \frac{[\varphi(y) + D\varphi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)]}{\sqrt{(at)^2 - |y - x|^2}} dy \quad (4.36)$$

给出的函数 $u \in C^2(\mathbf{R}^2 \times [0, +\infty))$, 且是初值问题 (4.34) 的解.

4.1.5 特征锥

设 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ ($n = 1, 2, 3$), 从公式 (4.20),

(4.33), (4.36) 我们得知, $u(x_0, t_0)$ 的值只与锥 $C(x_0, t_0) = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : |x - x_0| \leq a(t_0 - t)\}$ 内的初值 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及非齐次项 $f(x, t)$ 有关, 也就是说, $u(x_0, t_0)$ 的值完全由锥 $C(x_0, t_0)$ 内的初值 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及非齐次项 $f(x, t)$ 决定. 由于锥 $C(x_0, t_0)$ 的重要性我们给出如下定义.

定义 4.2 上半空间 $\mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ ($n \geq 1$) 中的锥

$$C(x_0, t_0) = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : |x - x_0| \leq a(t_0 - t)\}$$

称为以 (x_0, t_0) 为顶点的特征锥 (见图 4.3, 其中 $D_{(x_0, t_0)} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| \leq at_0\}$).

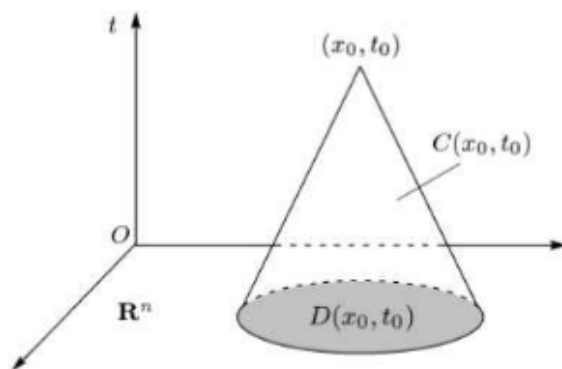


图 4.3

特别地, 我们考虑 $f \equiv 0$ 的简单情形. 此时 $u(x_0, t_0)$ 的值只依赖于区域 $D_{(x_0, t_0)} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| \leq at_0\}$ 上的初值, 而不依赖于区域 $\{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| > at_0\}$ 上的初值. 也就是说, 距离点 x_0 大于 at_0 处的初值在 $t = t_0$ 时刻之前不能对 $u(x_0, t_0)$ 产生影响. 区域 $D_{(x_0, t_0)} \subset \mathbf{R}^n$ 通常称为点 (x_0, t_0) 对初值的依赖区域. 这种扰动的传播速度有限 (等于 a) 的性质是波动方程的解的最基本特征.

这个性质我们还可以从另一个角度来阐述. 从公式 (4.20), (4.33), (4.36) 我们得知, 区域

$$J_{x_0} = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : |x - x_0| \leq at\}$$

上的点的值 $u(x, t)$ 与 x_0 处的初值 $\varphi(x_0), \psi(x_0)$, 有关, 即受到初值 $\varphi(x_0), \psi(x_0)$ 的影响 (见图 4.4), 而此区域以外的点的值 $u(x, t)$ 与 x_0 处的初值 $\varphi(x_0), \psi(x_0)$ 无关. 这就是说, 在时刻 t 之前, x_0 处的初值 $\varphi(x_0), \psi(x_0)$ 的影响范围不超过与 x_0 距离为 at 的点. 这说明扰动的传播速度有限, 且传播速度为 a . 区域 J_{x_0} 通常称为点 x_0 的影响区域. 不难看出, 影响区域和依赖区域有如下关系:

$$J_{x_0} = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : x_0 \in D_{(x, t)}\}.$$

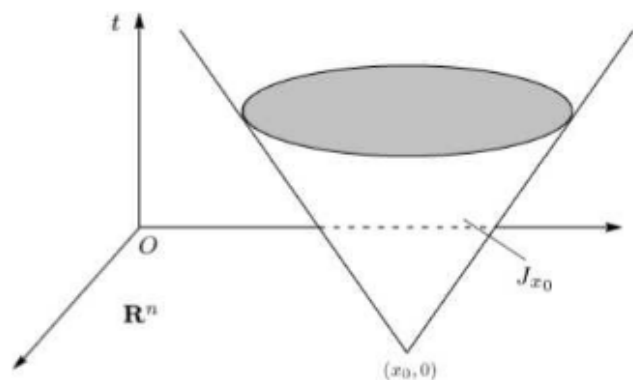


图 4.4

而对于一个区域 $D_0 \subset \mathbf{R}^n$, 它的影响区域 J_{D_0} 自然定义为它的所有点的影响区域的并集. 由定义易知

$$J_{D_0} = \bigcup_{x_0 \in D_0} J_{x_0} = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : D_{(x, t)} \cap D_0 \neq \emptyset\}.$$

对于任一区域 $D_0 \subset \mathbf{R}^n$, 我们还关心在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ 上的这些点 (x, t) , 其值 $u(x, t)$ 完全由 D_0 上的初值 φ 和 ψ 决定, 也就是那些点对初值的依赖区域完全包含于 D_0 的点. 这个区域通常称为区域 D_0 的**决定区域**, 记为 F_{D_0} . 实际上不难得到

$$F_{D_0} = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : D_{(x, t)} \subset D_0\} \subset \mathbf{R}_+^{n+1}.$$

综上所述, 我们知道扰动具有有限传播速度是波动方程的基本特征. 而从上一章我们知道扰动具有无限传播速度是热方程的基本

性质. 这也说明, 从本质上来看, 波动方程和热方程具有截然不同的特征.

从二维波动方程 Cauchy 问题的解的表达式来看, 二维问题实际上是一个特殊的三维问题, 其初值与空间的一个方向无关. 我们比较一下三维和二维波动方程 Cauchy 问题的解的表达式——Kirchhoff 公式 (4.33) 和 Poisson 公式 (4.36), 就会发现两者又有显著的差别. 虽然初值问题的解 $u(x, t)$ 在点 (x_0, t_0) 的值都只依赖于在依赖区域 $D_{(x_0, t_0)}$ 上给定的初值 φ, ψ , 但仔细观察 Kirchhoff 公式 (4.33) 和 Poisson 公式 (4.36) 就会发现, 当 $n = 3$ 时, $u(x_0, t_0)$ 实际上只依赖于在依赖区域 $D_{(x_0, t_0)}$ 的边界 $\partial D_{(x_0, t_0)} = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x - x_0| = at_0\}$ 上的初值 φ, ψ , 而与它们在 $D_{(x_0, t_0)}$ 内部 $\{x \in \mathbf{R}^3 : |x - x_0| < at_0\}$ 的初值 φ, ψ 无关; 而当 $n = 2$ 时, $u(x_0, t_0)$ 依赖于整个依赖区域 $D_{(x_0, t_0)} = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x - x_0| \leq at_0\}$ 上的初值 φ, ψ . 这个差别在物理学上产生截然不同的效应.

假设初值 φ, ψ 只在区域 D_0 内不为零. 更简单地, 假设初位移 φ 在整个空间 $\mathbf{R}^n$ 上恒为零, 初速度 ψ 在区域 D_0 内大于零, 在区域 D_0 外都等于零. 考虑区域 D_0 外的一个点 x_0 , 记点 x_0 到 D_0 的最短距离和最远距离分别为 $d_{\min}$ 和 $d_{\max}$, 即

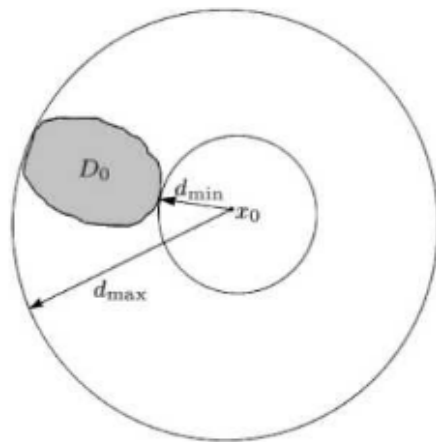


图 4.5

$$d_{\min} = \min_{x \in \bar{D}_0} |x - x_0|, \quad d_{\max} = \max_{x \in \bar{D}_0} |x - x_0|$$

(见图 4.5). 我们考虑在 t_0 时刻, 由于初值不为零而引起的点 x_0 的位移 $u(x_0, t_0)$.

下面我们分别考虑 $n = 3$ 和 $n = 2$ 的情形.

1. $n = 3$ 的情形

由 Kirchhoff 公式 (4.33) 得到:

(1) 当 $0 < t_0 < \frac{1}{a}d_{\min}$ 时, 由于 $\partial D_{(x_0, t_0)} \cap D_0$ 是空集, 则

$$u(x_0, t_0) = 0;$$

(2) 当 $\frac{1}{a}d_{\min} < t_0 < \frac{1}{a}d_{\max}$ 时, 由于 $\partial D_{(x_0, t_0)} \cap D_0$ 非空, 则

$$u(x_0, t_0) > 0;$$

(3) 当 $t_0 > \frac{1}{a}d_{\max}$ 时, 由于 $\partial D_{(x_0, t_0)} \cap D_0$ 是空集, 则

$$u(x_0, t_0) = 0.$$

这说明三维波 (如声波) 的传播既有清晰的波前, 又有清晰的波后. 这种现象通常称为 **Huygens 原理**或**无后效现象**.

2. $n = 2$ 的情形

由 Poisson 公式 (4.36) 得到:

(1) 当 $0 < t_0 < \frac{1}{a}d_{\min}$ 时, 由于 $D_{(x_0, t_0)} \cap D_0$ 是空集, 则

$$u(x_0, t_0) = 0;$$

(2) 当 $t_0 > \frac{1}{a}d_{\min}$ 时, 由于 $D_{(x_0, t_0)} \cap D_0$ 非空, 则

$$u(x_0, t_0) > 0.$$

这说明二维波 (如湖面上的水波) 的传播只有清晰的波前, 没有清晰的波后. 这种现象通常称为波的**弥漫**或**有后效现象**.

正是由于在三维空间中声波的传播具有无后效现象, 我们在谈话时可以清楚地听到对方的声音. 而在平面上波的传播会产生弥漫现象, 这就是为什么一块石头投入水中, 激起层层波浪而久久不消散的原因.

4.1.6 能量不等式

在这一小节中我们介绍波动方程的能量不等式. 能量不等式是波动方程中最重要的先验估计, 不仅可以用来证明波动方程的古典解的惟一性和稳定性, 而且还可以用来证明波动方程的广义解 (弱解) 的存在性. 值得指出的是波动方程的能量不等式具有明显的物理意义.

***定理 4.7** 设函数 $u \in C^1(\bar{\mathbf{R}}_+^{n+1}) \cap C^2(\mathbf{R}_+^{n+1})$ 是初值问题 (4.6) 的解. 固定一点 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$. 对于任意 $\tau \in [0, t_0]$, 在特征锥 $C(x_0, t_0) = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : |x - x_0| \leq a(t_0 - t)\}$ 上成立估计

$$\begin{aligned} & \int_{C_\tau} (u_t^2 + a^2 |Du|^2) dx \\ & \leq M \left[\int_{C_0} (\psi^2 + a^2 |D\varphi|^2) dx + \int_0^\tau dt \int_{C_t} f^2 dx \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中 $M = e^{t_0}$,

$$C_\tau = C(x_0, t_0) \cap \{t = \tau\} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| \leq a(t_0 - \tau)\}.$$

特别地, 当 $f \equiv 0$ 时, $M = 1$.

为简单起见, 我们只对一维初值问题 (4.13) 的能量不等式给出证明, 多维初值问题的能量不等式用同样的方法可以得到证明. 当 $n = 1$ 时, 特征锥 $C(x_0, t_0)$ 是上半平面 $\mathbf{R}_+^2$ 上以 (x_0, t_0) 为顶点, 底边为区间 $\{(x, 0) | x \in (x_0 - at_0, x_0 + at_0)\}$ 的等腰三角形, 即

$$C(x_0, t_0) = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^2 | 0 \leq t \leq t_0, x_0 - a(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + a(t_0 - t)\},$$

而当 $\tau \in [0, t_0]$ 时, 直线 $t = \tau$ 与等腰三角形 $C(x_0, t_0)$ 相交得线段

$$C_\tau = \{(x, \tau) | x_0 - a(t_0 - \tau) \leq x \leq x_0 + a(t_0 - \tau)\}$$

(见图 4.6). 因此我们的定理具有如下形式.

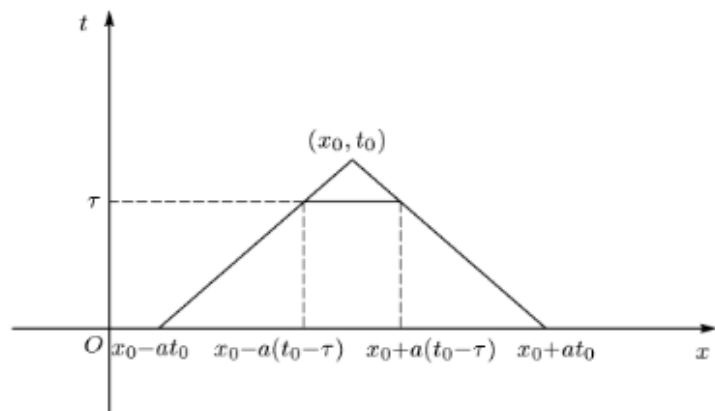


图 4.6

定理 4.7' 设 $u \in C^1(\bar{\mathbf{R}}_+^2) \cap C^2(\mathbf{R}_+^2)$ 是初值问题 (4.13) 的解. 固定一点 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}_+^2$, 则对于 $\tau \in [0, t_0]$, 成立估计

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 - a(t_0 - \tau)}^{x_0 + a(t_0 - \tau)} [(u_t^2(x, \tau) + a^2 u_x^2(x, \tau))] dx \\ & \leq M \left\{ \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^\tau dt \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} f^2(x, t) dx \right\}, \quad (4.38) \end{aligned}$$

其中 $M = e^{t_0}$. 特别地, 当 $f \equiv 0$ 时, $M = 1$.

证明 在初值问题 (4.13) 的波动方程两端同时乘 u_t , 并在等腰梯形 $C(\tau) = C(x_0, t_0) \cap \{0 \leq t \leq \tau\}$ 上积分, 我们得到

$$\iint_{C(\tau)} u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = \iint_{C(\tau)} u_t f dx dt.$$

注意到

$$u_t u_{tt} = \frac{1}{2} (u_t^2)_t,$$

$$u_t u_{xx} = (u_t u_x)_x - \frac{1}{2} (u_x^2)_t,$$

上式可化为

$$\iint_{C(\tau)} \left\{ \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2 u_x^2]_t - a^2 (u_t u_x)_x \right\} dx dt = \iint_{C(\tau)} u_t f dx dt.$$

将上述等式的左端记为 I , 对于积分 I 应用 Green 公式得到

$$I = \oint_{\partial C(\tau)} a^2 u_t u_x dt + \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx,$$

其中 $\partial C(\tau)$ 是等腰梯形 $C(\tau)$ 的边界, 它的定向沿顺时针方向. 记 Γ_τ^1 和 Γ_τ^2 为等腰梯形 $C(\tau)$ 的侧边, 易知

$$\Gamma_\tau^1 = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^2 | 0 \leq t \leq \tau, x = x_0 - a(t_0 - t)\},$$

$$\Gamma_\tau^2 = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+^2 | 0 \leq t \leq \tau, x = x_0 + a(t_0 - t)\}.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{x_0 - a(t_0 - \tau)}^{x_0 + a(t_0 - \tau)} [u_t^2(x, \tau) + a^2 u_x^2(x, \tau)] dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_\tau^1 \cup \Gamma_\tau^2} a^2 u_t u_x dt + \frac{1}{2} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

这里我们分别记右端的三个积分为 I_1, I_2 和 I_3 . 因此我们得到

$$I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{C(\tau)} u_t f dx dt.$$

下面利用 Γ_τ^1 和 Γ_τ^2 的表达式证明 I_3 非负. 事实上, 在 Γ_τ^1 上

$dx = a dt$, 在 Γ_τ^2 上 $dx = -a dt$, 从而

$$I_3 = \frac{a}{2} \int_{\Gamma_\tau^1} (u_t + a u_x)^2 dt - \frac{a}{2} \int_{\Gamma_\tau^2} (u_t - a u_x)^2 dt.$$

注意到 $\partial C(\tau)$ 的定向, 在 Γ_τ^1 上 dt 为正, 在 Γ_τ^2 上 dt 为负, 于是

$$I_3 \geq 0.$$

综上所述我们得到

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-a(t_0-\tau)}^{x_0+a(t_0-\tau)} [u_t^2(x, \tau) + a^2 u_x^2(x, \tau)] dx \\ & \leq \int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx + 2 \iint_{C(\tau)} u_t f dx dt. \end{aligned} \quad (4.39)$$

于是, 当 $f \equiv 0$ 时, 估计 (4.38) 成立, 且此时 $M = 1$.

最后, 处理不等式 (4.39) 的右端项. 由代数不等式 $2ab \leq a^2 + b^2$ 知

$$2 \iint_{C(\tau)} u_t f dx dt \leq \iint_{C(\tau)} u_t^2 dx dt + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt.$$

代入不等式 (4.39), 则

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-a(t_0-\tau)}^{x_0+a(t_0-\tau)} [u_t^2(x, \tau) + a^2 u_x^2(x, \tau)] dx \\ & \leq \int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} \{\psi^2(x) + a^2 [\varphi'(x)]^2\} dx \\ & \quad + \iint_{C(\tau)} u_t^2 dx dt + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.40)$$

记

$$G(\tau) = \iint_{C(\tau)} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx dt,$$

则

$$G(\tau) = \int_0^\tau \left[\int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0-t)} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \right] dt.$$

从不等式 (4.40) 可以得到一个 $G(\tau)$ 满足的微分不等式

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + F(\tau),$$

这里

$$F(\tau) = \int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt,$$

它是 τ 的单调递增函数. 利用 Gronwall 不等式 (引理 3.18) 立即得到

$$G(\tau) \leq (e^\tau - 1)F(\tau) \leq (e^{t_0} - 1)F(\tau)$$

和

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^\tau F(\tau) \leq e^{t_0} F(\tau).$$

这就是我们要证的结论.

附注 4.4 不记常数因子, 表达式

$$\int_{C_\tau} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx$$

表示物体的 C_τ 部分在 τ 时刻的总能量, 其中第一项积分表示动能, 第二项积分表示弹性势能. 通常称之为**能量积分**或**能量模**. 上述定理给出了初值问题 (4.6) 的解 u 的能量模估计. 特别地, 当外力项 $f \equiv 0$ 时, 物体的 C_τ 部分在 τ 时刻的总能量小于物体的 C_0 部分在初始时刻的总能量. 由上一小节分析, 在 τ 时刻 C_τ 的点的位移完全由初始时刻物体的 C_0 部分上的位移和速度决定, 而没有受到其他部分的影响, 因而在 τ 时刻此 C_τ 部分的能量由初始时刻物体 C_0 部分的能量转化而来.

附注 4.5 从定理 4.7' 的推导过程中, 我们得到另一种形式的能量模估计

$$\begin{aligned} & \iint_{C(\tau)} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx dt \\ & \leq M_1 \left[\int_{C_0} (\psi^2 + a^2 |\varphi'|^2) dx + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

此时 $M_1 = e^\tau - 1$, $C_0 = (x_0 - at_0, x_0 + at_0)$, 且

$$\begin{aligned} C(\tau) = \{ (x, t) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 \leq t \leq \tau, \\ x_0 - a(t_0 - t) \leq x \leq x_0 + a(t_0 - t) \}. \end{aligned}$$

附注 4.6 从能量模估计可以导出解 u 的 L^2 估计:

$$\begin{aligned} & \int_{C_\tau} u^2(x, \tau) dx \\ & \leq M_2 \left[\int_{C_0} (\varphi^2 + \psi^2 + a^2 |\varphi'|^2) dx + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{C(\tau)} u^2(x, t) dx dt \\ & \leq M_2 \left[\int_{C_0} (\varphi^2 + \psi^2 + a^2 |\varphi'|^2) dx + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

其中 $M_2 = e^{2\tau}$, $\tau \in [0, t_0]$, $C_\tau = (x_0 - a(t_0 - \tau), x_0 + a(t_0 - \tau))$, $C(\tau)$ 如附注 4.5 中的定义.

证明 对于任意 $\tau \in [0, t_0]$,

$$\begin{aligned} & \int_{C_\tau} [u^2(x, \tau) - u^2(x, 0)] dx = \int_{C_\tau} \int_0^\tau [u^2(x, t)]_t dt dx \\ & \leq \iint_{C(\tau)} u^2(x, t) dx dt + \iint_{C(\tau)} u_t^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

记

$$G(\tau) = \iint_{C(\tau)} u^2(x, t) dx dt,$$

则 $G(0) = 0$. 从上式可以得到一个 $G(\tau)$ 满足的微分不等式

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + F(\tau),$$

其中

$$F(\tau) = \int_{C_0} \varphi^2 dx + \iint_{C(\tau)} u_t^2 dx dt.$$

从估计 (4.41) 得到

$$F(\tau) \leq e^\tau \left[\int_{C_0} (\varphi^2 + \psi^2 + a^2 |\varphi'|^2) dx + \iint_{C(\tau)} f^2 dx dt \right],$$

利用 Gronwall 不等式 (引理 3.18) 得

$$\int_{C_\tau} u^2(x, \tau) dx \leq e^\tau F(\tau).$$

由此立即得到估计 (4.42). 又从 Gronwall 不等式的结论

$$G(\tau) \leq (e^\tau - 1)F(\tau),$$

立即得到估计 (4.43).

附注 4.7 从能量模估计 (4.37) 不难导出波动方程 Cauchy 初值问题 (4.6) 解的惟一性以及能量模意义下解对于初值和非齐次项的连续依赖性.

附注 4.8 利用能量模估计的证明方法, 我们可以证明半无界问题 (4.21) 在函数类 $C^1(\bar{\mathbf{R}}_+ \times \bar{\mathbf{R}}_+) \cap C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+)$ 中的解的惟一性. 具体来说, 在区域 $\{0 \leq x \leq x_0 - at, 0 \leq t \leq T\}$ 上 (其中 x_0 是任意正数, $0 < T \leq \frac{x_0}{a}$), 证明相应的齐次定解问题只有零解.

§ 4.2 混合问题

在这一节中我们将考虑一个更实际的模型. 在现实生活中我们研究的弹性体都是有界的. 由于这些物体所在的区域具有边界, 边

界点的位移或受力情况会通过弹性应力对弹性体产生影响, 因此我们对波动方程既需要提初始条件, 又需要提边值条件. 这样的定解问题通常称为混合问题.

我们重点考虑一维混合问题, 其中给定的边值条件是第一类的. 实际模型就是一根有限长的振动的均匀细弦. 我们已知弦上各点的初位移与初速度和受力情况, 并且知道两端点的位移变化, 要求在振动过程中弦上各点的位移. 我们将利用分离变量法来求解这样的混合问题. 对于其他边值条件的情形我们也可以利用同样的方法求解. 事实上分离变量法也适用于求解一些多维混合问题, 但求解过程要复杂一些.

4.2.1 分离变量法

现在我们考虑这样的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

我们将利用分离变量法来求解上述混合问题. 为了更好地理解分离变量法, 我们从最简单的情形开始.

1. $f \equiv 0, g_1(t) = g_2(t) \equiv 0$ 的情形

现在我们考虑混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (4.44)$$

我们利用分离变量法来求解此问题.

具体来说, 考虑分离变量形式的非零解

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

将它代入混合问题 (4.44) 的方程得到

$$T''(t)X(x) - a^2 X''(x)T(t) = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty),$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

在上式中, 左端是 t 的函数, 右端是 x 的函数, 因而只能是常数, 记为 $-\lambda$, 从而

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty),$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, l).$$

将 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 代入混合问题 (4.44) 的边值条件得到

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

由于 $u(x, t) \not\equiv 0$, 因此 $T(t) \not\equiv 0$, 从而

$$X(0) = X(l) = 0.$$

于是我们得到特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0, l), \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

根据定理 3.6 的结论, 易见特征值问题 (4.45) 的解必满足

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

其中 C_1, C_2 为待定常数. 由边值条件得到

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

由于 $C_2 \neq 0$, 否则 $X(x) \equiv 0$, 从而

$$\sin \sqrt{\lambda}l = 0,$$

于是所有特征值是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

与特征值 λ_n 对应的特征函数是

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots.$$

而与 $X_n(x)$ 对应的 $T_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) 为

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{na\pi}{l}t + B_n \sin \frac{na\pi}{l}t, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 A_n, B_n ($n = 1, 2, \dots$) 为待定常数. 分离变量形式的解为

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= T_n(t)X_n(x) \\ &= \left(A_n \cos \frac{na\pi}{l}t + B_n \sin \frac{na\pi}{l}t\right) \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

从形式上看, 每一个 $u_n(x, t)$ ($n = 1, 2, \dots$) 都满足方程和边值条件, 但一般来讲它们都不满足初始条件. 为求一个既满足方程和边值条件又满足初始条件的解, 我们将 $u_n(x, t)$ 叠加. 形式上,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{na\pi}{l}t + B_n \sin \frac{na\pi}{l}t\right) \sin \frac{n\pi}{l}x \end{aligned} \quad (4.46)$$

满足方程. 为使 $u(x, t)$ 满足初始条件我们需要

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l}x. \end{aligned}$$

由于特征函数系 $\left\{\sin \frac{n\pi}{l}x\right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的完备性, 因此 $\varphi(x)$,

$\psi(x)$ 可以展开成

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

比较上述表达式我们得到

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.47)$$

$$B_n = \frac{l}{na\pi} \psi_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (4.48)$$

这样我们就求得混合问题 (4.44) 的形式解 (4.46), 其中它的系数由式 (4.47), (4.48) 决定. 为了使得所得到的形式解确实是混合问题 (4.44) 的古典解, 我们需要对初值提适当的光滑性要求, 同时需要在定解区域的角点 $(0, 0)$, $(l, 0)$ 提适当的相容性条件. 这里相容性条件的导出与上一小节半无界问题的相容性条件完全一致, 参见习题.

定理 4.8 若 $\varphi(x) \in C^3[0, l]$, $\psi(x) \in C^2[0, l]$ 及 $\varphi(x), \psi(x)$ 在定解区域 $Q = (0, l) \times (0, +\infty)$ 的角点 $(0, 0)$, $(l, 0)$ 满足相容性条件

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

则由式 (4.46) 给出的函数 $u(x, t) \in C^2(\bar{Q})$, 且满足混合问题 (4.44).

证明 由定理的假设和分部积分公式, 我们得到

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l}x \, dx = -\frac{l^3}{\pi^3 n^3} a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

同理

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -\frac{l^3}{a\pi^3 n^3} b_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

于是在 $\bar{Q} = [0, l] \times [0, +\infty)$ 上我们有估计

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n| \leq \frac{C_1}{n^3}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$|Du_n(x, t)| \leq \frac{C_2}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$|D^2 u_n(x, t)| \leq a_n^2 + b_n^2 + \frac{C_3}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

这里 $Du_n(x, t)$ 表示 $u_n(x, t)$ 的所有一阶偏导数, $|Du_n(x, t)|$ 表示 $u_n(x, t)$ 的所有一阶偏导数的平方和的平方根, $D^2 u_n(x, t)$ 表示 $u_n(x, t)$ 的所有二阶偏导数, $|D^2 u_n(x, t)|$ 表示 $u_n(x, t)$ 的所有二阶偏导数的平方和的平方根, C_1, C_2, C_3 是只依赖于 l, a 和定积分

$$\int_0^l |\varphi'''(x)| dx, \quad \int_0^l |\psi''(x)| dx$$

的常数.

从 Fourier 级数的 Bessel 不等式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi'''(x)|^2 dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\psi''(x)|^2 dx.$$

因此我们证明了级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x, t), \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n(x, t)$$

在 $\bar{Q}$ 上均一致收敛, 从而得到由表达式 (4.46) 给出的函数 $u \in C^2(\bar{Q})$. 而且我们可以将 $u(x, t)$ 的级数逐项对变量 x, t 微分两次, 并容易证明 $u(x, t)$ 满足混合问题 (4.44) 的方程和初边值条件.

2. $f(x, t) \not\equiv 0, g_1(t) = g_2(t) = 0$ 的情形

现在我们考虑混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (4.49)$$

我们仍然可以利用分离变量法来求解.

具体来说, 把混合问题 (4.49) 的解 $u(x, t)$, 非齐次项 $f(x, t)$ 和初值 $\varphi(x), \psi(x)$ 都按特征函数系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} (n = 1, 2, \dots)$ 展开:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (4.50)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

由特征函数系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} (n = 1, 2, \dots)$ 的正交性和完备性得到

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

为求出未知函数 $T_n(t)$, 把上述表达式代入混合问题 (4.49) 的方程, 由特征函数系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\} (n = 1, 2, \dots)$ 的完备性, 从而得到 $T_n(t)$ 满足以下常微分方程和初值条件

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 T_n(t) = f_n(t), & t \in (0, +\infty), \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n. \end{cases} \quad (4.51)$$

求解常微分方程初值问题 (4.51) 得到, 对于 $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} T_n(t) = & \varphi_n \cos \frac{na\pi}{l} t + \frac{l}{na\pi} \psi_n \sin \frac{na\pi}{l} t \\ & + \frac{l}{na\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{na\pi}{l} (t - \tau) \, d\tau. \end{aligned} \quad (4.52)$$

将它代入级数 (4.50), 这样就求得混合问题 (4.49) 的解的表达式. 如果对初值 φ, ψ 和非齐次项 f 提适当的光滑性要求, 并在角点 $(0, 0), (l, 0)$ 提相容性条件

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0, \\ a^2 \varphi''(0) + f(0, 0) = 0, \quad a^2 \varphi''(l) + f(l, 0) = 0, \end{aligned}$$

同样可以证明上面的表达式 (4.50) 给出的形式解确实是混合问题 (4.49) 属于 $C^2(\bar{Q})$ 的解.

3. $f(x, t) \not\equiv 0, g_1(t) \neq 0, g_2(t) \neq 0$ 的情形

现在我们考虑具有非齐次边值的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t), & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (4.53)$$

为了利用分离变量法我们作函数变换

$$v = u - \left[\frac{l-x}{l} g_1(t) + \frac{x}{l} g_2(t) \right],$$

得到一个关于 v 的具有齐次边值的混合问题. 对初值 φ, ψ , 边值 g_1, g_2 , 和非齐次项 f 提适当的光滑性要求, 在角点 $(0, 0), (l, 0)$ 提相容性条件

$$\begin{aligned} \varphi(0) = g_1(0), \quad \varphi(l) = g_2(0), \\ \psi(0) = g_1'(0), \quad \psi(l) = g_2'(0), \\ g_1''(0) - a^2 \varphi''(0) = f(0, 0), \quad g_2''(0) - a^2 \varphi''(l) = f(l, 0), \end{aligned}$$

我们仍然可以证明所得的解是混合问题的古典解.

附注 4.9 对于混合问题 (4.44), 我们同样可以采用对称开拓法求解. 具体来说, 对初值 φ, ψ 进行奇且周期为 $2l$ 的对称开拓, 定义

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \varphi(x), & \quad x \in [0, l], \\ \Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = \Phi(x + 2l), & \quad x \in \mathbf{R}, \\ \Psi(x) = \psi(x), & \quad x \in [0, l], \\ \Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = \Psi(x + 2l), & \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

然后求解初值问题

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ U(x, 0) = \Phi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ U_t(x, 0) = \Psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

由 D'Alembert 公式, 得到解

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) \, d\xi.$$

容易证明 $U(x, t)$ 是关于 x 周期为 $2l$ 的奇函数, 因此在 $\bar{Q}$ 上, 令

$$u(x, t) = U(x, t),$$

则它必然是混合问题 (4.44) 的解. 由上述解的表达式可以看出, 定理 4.8 中关于初值 φ 和 ψ 的光滑性要求可以降低为 $\varphi(x) \in C^2[0, l]$, $\psi(x) \in C^1[0, l]$.

在历史上, 解的表达式 (4.46) 首先是从物理直观得到的. 从解的表达式 (4.46) 我们知道混合问题 (4.44) 的解可以表示成三角级数的和, 但是人们同时又利用对称开拓法把解表示成 D'Alembert 公式. 这两个解的表达式差别如此大, 这是什么原因呢? 实际上, 如果对 Fourier 级数有深入的了解, 我们将知道上述两个解的表达式表示同样的函数. 此结论可以利用 Fourier 级数直接证明, 也可以根据后面的能量不等式来证明. 这是因为能量不等式蕴涵着混合问题的古典解的惟一性, 从而证明两个不同的表达式表示同样的函数.

4.2.2 驻波法与共振

分离变量法具有明显的物理意义. 实际上, 我们把级数 (4.46) 中的每一项 $u_n(x, t)$ 改写成

$$u_n(x, t) = N_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \left(\frac{na\pi}{l} t + \alpha_n \right),$$

其中 $N_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\alpha_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$. $u_n(x, t)$ 称为弦的 **振动元素**, 描述了弦上的点 x 所做的振幅为 $a_n = N_n \sin \frac{n\pi}{l} x$, 频率为 $\omega_n = \frac{na\pi}{l}$, 初相位为 α_n 的简谐振动. 特别地, 如果初相位 $\alpha_n = 0$, 当 $x = 0, \frac{l}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}l, l$ 时, 振动元素 $u_n(x, t)$ 的振幅 $a_n = 0$; 当 $x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}l$ 时, $u_n(x, t)$ 的振幅 $a_n = \pm N_n$. 弦的这种形式的运动称为 **驻波**. 因此在物理学上分离变量法也称为 **驻波法**. 由分离变量法我们知道, 弦的振动在不受外力作用下, 可以分解为一系列具有特定频率的驻波的叠加.

下面我们利用一维波动方程的混合问题的结论来解释弦乐器 (小提琴、琵琶、吉他、二胡等) 的演奏原理. 我们用 $u(x, t)$ 表示

弦乐器的弦的振动位移. 由于弦的振动而引起其周围空气的振动, 进一步引起音箱的共鸣, 从而产生出悦耳的音乐. 因此我们可以用

由分离变量法得到的解的表达式 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 来表示我们

听到的音乐. 此时弦的基音是由最低频率 $\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$ (T_0

为弦的张力, ρ_0 为密度) 所对应的单音 $u_1(x, t)$ 确定的. 振动元素 $u_1(x, t)$ 的最大振幅 $N_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ 通常要比振动元素 $u_n(x, t)$ 的最大振幅 $N_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ($n \geq 2$) 大得多, 因此它决定了音乐的基调. 而弦的其他的单音 $u_n(x, t)$ ($n \geq 2$) 称为泛音, 它们构成了声音的音色. 我们知道不同的弦乐器演奏同一首曲子时, 虽然音调是相同的, 但是音乐声却是不同的. 这是因为它们虽然具有相同的基音频率, 却也具有不同的泛音频率. 这样就产生了音质的差异. 在用弦乐器演奏曲子的时候, 由于演奏者用手指按住弦线的不同部位,

这样受振动的弦的长度顿时变小了, 基音频率 $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$ 就增大,

音调也随之升高. 特别地, 当手指按住弦的中点时, 基音和泛音的频率就比原来的频率增加一倍, 弦就发出比原来高八度的音调. 另外, 演奏者也经常利用拧紧和拧松弦线的方法来调整弦的音调. 这也可以从弦的基音频率的表达式来理解. 当拧紧弦线时, 弦的张力增大, 弦的音调就变高; 当拧松弦线时, 弦的张力减小, 弦的音调就变低. 此外, 我们知道每件弦乐器上都有好几根长度相同而粗细不同的弦, 而且每根弦演奏的音调也不同. 从弦的基音频率的表达式来看, 由于粗弦的密度大, 因而基音频率就小, 音调就低; 由于细弦的密度小, 因而基音频率就大, 音调就高. 从上面的分析我们就对弦乐器的演奏原理得到初步的理解.

由用分离变量法得到的混合问题 (4.49) 的解的表达式 (4.50) 和 (4.52), 我们还可以解释物理学中在强迫振动下所产生的 **共振现象**. 为此考虑混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A(x) \sin \omega t, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

其中 ω 是一个正常数, 函数 $A(x) \in C[0, l]$ 满足 $A(0) = A(l) = 0$.

由解的表达式 (4.50) 知

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left[\frac{l}{na\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{na\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中

$$\omega_n = \frac{na\pi}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l A(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

当 $\omega \neq \omega_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 时,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

显然上等式右端的级数是一致有界的.

当存在某个 $k \in \mathbf{Z}$ 使得 $\omega = \omega_k$ 时, 则

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega_k \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_k t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &\quad + \frac{a_k}{2\omega_k^2} (\sin \omega_k t - t\omega_k \cos \omega_k t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \end{aligned}$$

此时上等式右端的级数是一致有界的, 而当选取 $A(x)$ 使得 $a_k \neq 0$ 时, 对应于固有频率 ω_k 的第 k 个振动元素 $u_k(x, t)$ 的振幅可以随时间一起无限增大, 这就是物理上的共振现象. 这表示一根两端固定的弦在一个周期外力的作用下做强迫振动, 如果周期外力的频率

与弦的某个固有频率相等, 那么弦将产生共振, 弦的一些点的振幅将随着时间的增大而趋于无穷, 这必然在某一时刻导致弦的断裂.

实际上, 此例还蕴涵着在位势方程和热方程中占有重要地位的极大模估计在波动方程中不可能成立. 这也反映了波动方程的解的性质与位势方程和热方程的解的性质有很大的差别.

4.2.3 能量不等式

在这一小节中我们介绍混合问题的能量不等式.

***定理 4.9** 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个有界开集, 并令 $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. 如果 $u \in C^1(\bar{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$ 是混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \bar{\Omega} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \bar{\Omega} \\ u(x, t) = 0, & t \in [0, T], x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.54)$$

的解, 则存在只依赖于 T 的常数 M , 使得对于任意 $\tau \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [u_t^2(x, \tau) + a^2 |Du(x, \tau)|^2] dx \\ &\leq M \left\{ \int_{\Omega} [\psi^2(x) + a^2 |D\varphi(x)|^2] dx + \iint_{\Omega_{\tau}} f^2(x, t) dx dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

其中 $\Omega_{\tau} = \Omega \times (0, \tau)$. 当 $f \equiv 0$ 时, $M = 1$ 且上式中的不等号由等号代替.

为简单起见, 我们只对二维混合问题 (4.54) 的能量不等式给出证明. 此时, 我们的定理具有如下形式.

定理 4.9' 设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个有界并集, 并令 $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. 如果 $u \in C^1(\bar{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$ 是混合问题 (4.54) 的解, 则存在只依赖于 T 的常数 M , 使得对于 $\tau \in [0, T]$, 有

$$\iint_{\Omega} \{u_t^2(x, y, \tau) + a^2 [u_x^2(x, y, \tau) + u_y^2(x, y, \tau)]\} dx dy$$

$$\leq M \left\{ \iint_{\Omega} \{ \psi^2(x, y) + a^2[\varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y)] \} dx dy + \iiint_{\Omega_\tau} f^2(x, y, t) dx dy dt \right\}, \quad (4.56)$$

其中 $\Omega_\tau = \Omega \times (0, \tau)$ (见图 4.7). 当 $f \equiv 0$ 时, $M = 1$ 且上式中的不等号由等号代替.

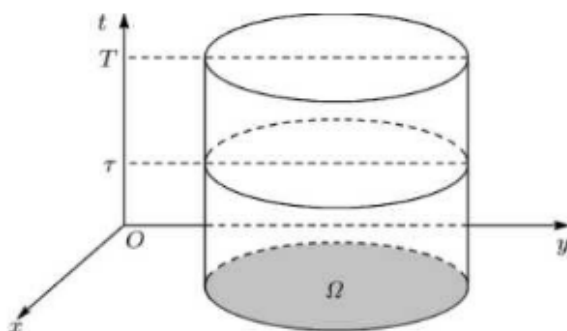


图 4.7

证明 在混合问题 (4.54) 的波动方程两端同乘 u_t , 并在区域 Ω_τ 上积分, 我们得到

$$\iiint_{\Omega_\tau} u_t [u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})] dx dy dt = \iiint_{\Omega_\tau} u_t f dx dy dt.$$

注意到

$$\begin{aligned} & u_t [u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})] \\ &= \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]_t - a^2[(u_t u_x)_x + (u_t u_y)_y], \end{aligned}$$

将上述等式的左端记为 I , 对于积分 I 应用 Gauss-Green 公式得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial\Omega_\tau} \left\{ \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] \cos(\mathbf{n}, t) \right. \\ &\quad \left. - a^2[u_t u_x \cos(\mathbf{n}, x) + u_t u_y \cos(\mathbf{n}, y)] \right\} dS, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是边界 $\partial\Omega_\tau$ 的单位外法向量.

利用边值条件证明在柱体 $\Omega \times [0, \tau]$ 的侧面 $\partial\Omega \times [0, \tau]$ 上的积分为零. 事实上, 在侧面 $\partial\Omega \times [0, \tau]$ 上, $\cos(\mathbf{n}, t) = 0$, 而由边值条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 则有 $u_t|_{\partial\Omega} = 0$. 于是在柱体的侧面 $\partial\Omega \times [0, \tau]$ 上积分为零, 从而

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\psi^2 + a^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] dx dy.$$

综上所述, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [\psi^2 + a^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] dx dy \\ &= \iiint_{\Omega_\tau} u_t f dx dy dt. \end{aligned} \quad (4.57)$$

于是, 当 $f \equiv 0$ 时, 估计 (4.56) 成立, 且此时 $M = 1$.

我们接着处理表达式 (4.57) 的右端项. 由不等式 $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ ($\varepsilon > 0$), 我们得到

$$\iiint_{\Omega_\tau} u_t f dx dy dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{\Omega_\tau} u_t^2 dx dy dt + \frac{1}{2\varepsilon} \iiint_{\Omega_\tau} f^2 dx dy dt,$$

这里 ε 是待定正数. 将它代入式 (4.57), 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{ u_t^2(x, y, \tau) + a^2[u_x^2(x, y, \tau) + u_y^2(x, y, \tau)] \} dx dy \\ & \leq \iint_{\Omega} \{ \psi^2(x) + a^2[\varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y)] \} dx dy \\ & \quad + \varepsilon \iiint_{\Omega_\tau} u_t^2(x, y, t) dx dy dt + \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{\Omega_\tau} f^2(x, y, t) dx dy dt. \end{aligned}$$

记

$$G(\tau) = \iint_{\Omega} \{ u_t^2(x, y, \tau) + a^2[u_x^2(x, y, \tau) + u_y^2(x, y, \tau)] \} dx dy,$$

则从上述不等式可以得到一个 $G(\tau)$ 满足的微分不等式

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq \varepsilon G(\tau) + F_\varepsilon(\tau),$$

其中

$$F_\varepsilon(\tau) = \iint_{\Omega} [\psi^2(x) + a^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{\Omega_\tau} f^2 dx dy dt,$$

它是 τ 的单调递增函数. 利用 Gronwall 不等式 (引理 3.18) 得到

$$G(\tau) \leq \int_0^\tau e^{\varepsilon(\tau-t)} F_\varepsilon(t) dt \leq \frac{1}{\varepsilon} (e^{\varepsilon\tau} - 1) F_\varepsilon(\tau).$$

于是

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^{\varepsilon\tau} F_\varepsilon(\tau) \leq e^{\varepsilon T} F_\varepsilon(\tau).$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{T}$, 从而

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{u_t^2(x, y, \tau) + a^2[u_x^2(x, y, \tau) + u_y^2(x, y, \tau)]\} dx dy \\ & \leq e(1+T) \left\{ \iint_{\Omega} \{\psi^2(x, y) + a^2[\varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y)]\} dx dy \right. \\ & \quad \left. + \iiint_{\Omega_\tau} f^2(x, y, t) dx dy dt \right\}. \end{aligned}$$

定理至此获证.

附注 4.10 如同附注 4.4 一样, 如果我们不记常数因子, 那么表达式

$$\iint_{\Omega} \{u_t^2(x, y, \tau) + a^2[u_x^2(x, y, \tau) + u_y^2(x, y, \tau)]\} dx dy$$

表示物体 Ω 在 τ 时刻的总能量, 其中第一项积分表示动能, 第二项积分表示弹性势能. 当外力 $f \equiv 0$ 时, 则说明在振动过程中能量守恒.

附注 4.11 对于不等式 (4.56) 关于 t 从 0 到 τ ($0 \leq \tau \leq T$) 积分, 可以得到另一种形式的能量模估计

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_\tau} \{u_t^2(x, y, t) + a^2[u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)]\} dx dy dt \\ & \leq M \left\{ \iint_{\Omega} \{\psi^2(x, y) + a^2[\varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y)]\} dx dy \right. \\ & \quad \left. + \iiint_{\Omega_\tau} f^2(x, y, t) dx dy dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

其中 M 是只依赖于 T 的常数, $\Omega_\tau = \Omega \times (0, \tau)$. 同样, 利用附注 4.6 的方法我们可以得到解 u 的 L^2 估计.

附注 4.12 从能量模估计 (4.55) 不难导出波动方程混合问题解在函数类 $C^1(\bar{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$ 中的惟一性以及能量模意义下解对于初值和右端项的连续依赖性.

*4.2.4 广义解

在这一小节中我们考虑下列较为简单的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (4.59)$$

在前面对上述混合问题的求解过程中, 我们都要求所找的解在定解区域 $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ 的内部二次连续可微且满足方程, 同时在区域边界上满足初边值条件. 为了保证混合问题 (4.59) 在函数类 $C^1(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$ 有解, 我们对于初边值提了一定的光滑性条件, 并在定解区域的角点 $(0, 0)$, $(0, l)$ 提了一些相容性条件. 然而从物理学上的观点来看, 这样的光滑性条件过于苛刻, 也很不自然. 我们举一个简单例子来阐明这个问题. 考虑一根两端固定的弦, 在中间的一点 x_0 将弦线提起, 使它离开水平位置, 然后轻轻放下, 弦就开

始做横振动. 这样的问题在物理学上是明确的, 而在数学上如果我们拘泥于前面的解的定义, 这样的问题在指定的函数类是无解的. 因为此定解问题中初速度为零, 初位移 $\varphi(x)$ 在点 x_0 不可微 (见图 4.8), 因此不满足定理 4.8 的条件. 实际上, 由波动方程的性质, 解在初值的奇性沿特征线向内部传播. 更精确地说, 当 $t > 0$ 时, $\varphi'(x)$ 在点 x_0 的不连续性将沿着特征线 $x - x_0 = at$ 和 $x - x_0 = -at$, 并通过固定边界 $x = 0, x = l$ 的反射, 向定解区域内部传播开来. 所以混合问题 (4.59) 在 Q 上不可能存在二次连续可微的解.

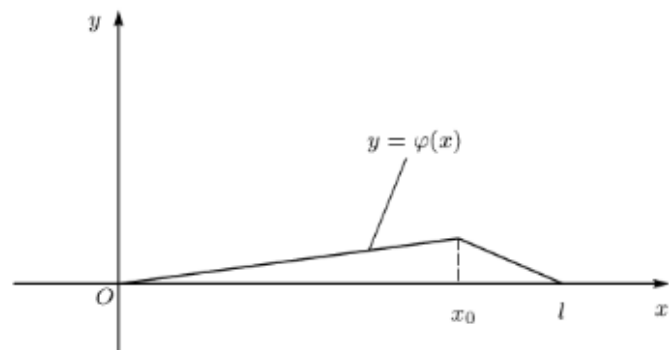


图 4.8

为了使得这样的定解问题在数学上存在解, 我们必须在一个更大的函数空间来求解, 从而需要扩大解的函数类. 因此我们必须放弃对解的二次连续可微的要求. 我们通常将原来二次连续可微的解称为**古典解**, 在扩大的函数类中的解称为**广义解**. 为了使得我们在扩大的函数类找到的解符合实际问题的要求, 我们在扩大解的函数类时必须遵行一定的原则. 这些原则就是:

- (1) 古典解必是广义解;
- (2) 广义解是惟一的, 且在一定意义下连续依赖于定解条件.

定义广义解的方式有很多种, 但最自然的方式是回到原来的物理模型, 按照守恒律或变分原理来定义. 这是因为我们考虑的方程都是在假设解是二次连续可微的条件下, 由守恒律的积分等式导出的. 既然要降低解的光滑性要求, 那么广义解满足方程只能在较弱

的意义下理解. 因此我们希望广义解在适当意义下满足守恒律的积分等式.

如果 $u(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T)$ 是混合问题 (4.59) 的古典解, 对于任意 $\zeta(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T)$, 将混合问题 (4.59) 的方程两边同乘 $\zeta(x, t)$, 并在 Q_T 上积分, 则

$$\iint_{Q_T} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) \zeta \, dx dt = 0.$$

对上式分部积分, 利用边值条件将 u 的偏导数转移到 ζ 上, 得到

$$\iint_{Q_T} u(\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx}) \, dx dt + \int_0^l (u_t \zeta - u \zeta_t)|_0^T \, dx - a^2 \int_0^l (u_x \zeta)|_0^l \, dt = 0.$$

由 $u(x, t)$ 满足的初值条件, 并假设 $\zeta(x, t)$ 满足

$$\zeta(x, T) = \zeta_t(x, T) = \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0,$$

则上式简化为

$$\iint_{Q_T} u(\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx}) \, dx dt + \int_0^l \varphi \zeta_t(x, 0) \, dx - \int_0^l \psi \zeta(x, 0) \, dx = 0. \quad (4.60)$$

实际上, 当 $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$ 时, 积分等式 (4.60) 有意义. 这提示我们可以利用此积分等式来降低解的光滑性要求. 而对于 $D = \{\zeta(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T) | \zeta(x, T) = \zeta_t(x, T) = \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0\}$, 我们称之为**试验函数类**, $\zeta(x, t) \in D$ 称为**试验函数**.

定义 4.3 如果对于任意试验函数 $\zeta(x, t) \in D$, 积分等式 (4.60) 成立, 则函数 $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$ 称为混合问题 (4.59) 的**广义解**.

从广义解的引入过程中, 我们知道古典解一定是广义解, 即上述原则 (1) 成立. 下面我们证明原则 (2) 成立.

定理 4.10 混合问题 (4.59) 的广义解一定惟一.

证明 设混合问题 (4.59) 有两个解 $u_1(x, t), u_2(x, t)$, 并记函数 $w = u_1 - u_2$. 由于 u_1, u_2 满足积分等式 (4.60), 则对于任意的 $\zeta \in D$, 函数 w 满足

$$\iint_{Q_T} w(\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx}) \, dx dt = 0. \quad (4.61)$$

设 $g(x, t) \in C_0^\infty(Q_T)$ (即 $g(x, t) \in C^\infty(Q_T)$, 且在 ∂Q_T 的一个邻域上为 0), 考虑定解问题

$$\begin{cases} \zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx} = g(x, t), & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ \zeta(x, T) = 0, & x \in [0, l], \\ \zeta_t(x, T) = 0, & x \in [0, l], \\ \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.62)$$

作变量替换 $\tau = T - t$ 和函数变换 $\bar{\zeta}(x, \tau) = \zeta(x, t) = \zeta(x, T - \tau)$, 则 $\bar{\zeta}(x, \tau)$ 在 Q_T 上满足混合问题

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_{\tau\tau} - a^2 \bar{\zeta}_{xx} = \bar{g}(x, \tau), & (x, \tau) \in (0, l) \times (0, T), \\ \bar{\zeta}(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ \bar{\zeta}_\tau(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ \bar{\zeta}(0, \tau) = \bar{\zeta}(l, \tau) = 0, & \tau \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.63)$$

由于 $\bar{g}(x, \tau) = g(x, T - \tau)$ 是光滑函数, 且在 ∂Q_T 的一个邻域上为 0, 从而在定解区域 Q_T 的角点 $(0, 0)$, $(l, 0)$ 成立相容性条件

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(0, 0) &= \bar{\zeta}_\tau(0, 0) = \bar{\zeta}(l, 0) = \bar{\zeta}_\tau(l, 0) = 0, \\ \bar{\zeta}_{\tau\tau}(0, 0) - a^2 \bar{\zeta}_{xx}(0, 0) &= \bar{g}(0, 0) = g(0, T) = 0, \\ \bar{\zeta}_{\tau\tau}(l, 0) - a^2 \bar{\zeta}_{xx}(l, 0) &= \bar{g}(l, 0) = g(l, T) = 0. \end{aligned}$$

由分离变量法知混合问题 (4.63) 存在解 $\bar{\zeta}(x, \tau) \in C^2(\bar{Q}_T)$. 显然函数 $\zeta(x, t) = \bar{\zeta}(x, T - t) \in \mathcal{D}$ 是定解问题 (4.62) 的解. 于是我们从积分等式 (4.60) 得到, 对于任意 $g(x, t) \in C_0^\infty(Q_T)$, 成立

$$\iint_{Q_T} w g \, dx dt = 0. \quad (4.64)$$

下面证明在 Q_T 上 $w \equiv 0$. 我们用反证法. 记 $z = (x, t)$, $dz = dx dt$. 假设存在一点 $z_0 = (x_0, t_0) \in Q_T$ 使得 $w(z_0) \neq 0$. 不妨设 $w(z_0) > 0$. 由函数 $w(z)$ 的连续性, 存在一个以 z_0 为圆心, r_0 为半径的圆盘 $B(z_0, r_0) \subset Q_T$, 使得

$$w(z) \geq \frac{1}{2} w(z_0), \quad z \in B(z_0, r_0).$$

取 $g(z) \in C_0^\infty(Q_T)$, 使得在 Q_T 上 $g(z) \geq 0$, 在圆盘 $B(z_0, \frac{r_0}{2})$ 上 $g(z) \equiv 1$, 在 $Q_T \setminus B(z_0, r_0)$ 上 $g(z) \equiv 0$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} w g \, dx dt &= \int_{B(z_0, r_0)} w g \, dz \geq \int_{B(z_0, \frac{r_0}{2})} w g \, dz \\ &\geq \frac{\pi r_0^2}{8} w(z_0) > 0. \end{aligned}$$

这与式 (4.64) 矛盾, 因此在 Q_T 上 $w \equiv 0$. 由于函数 $w(z)$ 的连续性, 从而在 $\bar{Q}_T$ 上 $w \equiv 0$. 至此惟一性获证.

仿照惟一性的证明, 我们可以进一步证明广义解满足下列形式的能量模估计.

定理 4.11 混合问题 (4.59) 的广义解 $u(x, t)$ 满足

$$\iint_{Q_T} u^2 \, dx dt \leq M \left(\int_0^l \varphi^2 \, dx + \int_0^l \psi^2 \, dx \right), \quad (4.65)$$

其中 M 仅与 a 和 T 有关.

证明 对于混合问题 (4.59) 的广义解 $u(x, t)$, 我们可以找到一系列 $u_n \in C_0^\infty(Q_T)$ ($n = 1, 2, \dots$) 使得

$$\iint_{Q_T} |u - u_n|^2 \, dx dt \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.66)$$

固定 $n \in \mathbf{Z}$, 考虑定解问题

$$\begin{cases} \zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx} = u_n, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ \zeta(x, T) = 0, & x \in [0, l], \\ \zeta_t(x, T) = 0, & x \in [0, l], \\ \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.67)$$

由惟一性定理的证明, 利用分离变量法知混合问题 (4.67) 存在解 $\zeta_n(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T)$. 于是我们在积分等式 (4.60) 取试验函数 ζ_n 得到

$$\iint_{Q_T} u u_n \, dx dt + \int_0^l \varphi(x) \zeta_{nt}(x, 0) \, dx - \int_0^l \psi(x) \zeta_n(x, 0) \, dx = 0. \quad (4.68)$$

由于 $\zeta_n(x, t) \in C^2(\bar{Q}_T)$ 是混合问题 (4.67) 的古典解, 由上一小节的结论我们不难证明下列能量不等式

$$\int_0^l |\zeta_{nt}(x, 0)|^2 dx \leq C_1 \iint_{Q_T} u_n^2 dx dt,$$

$$\int_0^l |\zeta_n(x, 0)|^2 dx \leq C_2 \iint_{Q_T} u_n^2 dx dt.$$

于是, 从等式 (4.68) 和不等式 $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ ($\varepsilon > 0$) 我们得到

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} uu_n dx dt &\leq \left(\int_0^l \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\zeta_{nt}(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_0^l \psi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |\zeta_n(x, 0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{Q_T} u_n^2 dx dt + C_3 \int_0^l [\varphi^2(x) + \psi^2(x)] dx. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由不等式 (4.66) 我们得到

$$\iint_{Q_T} u^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \iint_{Q_T} u^2 dx dt + C_3 \int_0^l [\varphi^2(x) + \psi^2(x)] dx.$$

移项就得出不等式 (4.65).

推论 4.12 若 $u_i(x, t)$ 是相应于初值为 $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ($i = 1, 2$) 的混合问题 (4.59) 的广义解, 则

$$\iint_{Q_T} |u_1 - u_2|^2 dx dt \leq M \left(\int_0^l |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dx + \int_0^l |\psi_1 - \psi_2|^2 dx \right),$$

其中 M 仅与 a 和 T 有关.

这就说明了广义解在 L^2 模意义下对于初值的连续依赖性.

通过引入广义解的概念, 我们可以大大降低对于初值的光滑性以及角点 $(0, 0)$, $(0, l)$ 的相容性条件的要求, 使得一些过去认为无解的问题, 在广义解的意义下也存在解.

定理 4.13 若 $\varphi(x) \in C([0, l])$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ 在 $[0, l]$ 上分别除去有限个第一类间断点外连续, 则定解问题 (4.59) 存在惟一的广义解, 且仍可表示成 (4.46) 的形式.

证明 我们只需要证明解的存在性.

根据关于 φ, ψ 的假设, 它们可以按特征函数系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 展开成

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (4.69)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (4.70)$$

其中 φ_n, ψ_n 是 $\varphi(x), \psi(x)$ 的 Fourier 系数. 由 φ 满足的条件, 则

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{l}{n\pi} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{l}{n\pi} \varphi'_n, \end{aligned}$$

其中 φ'_n 是 $\varphi'(x)$ 按特征函数系 $\left\{ \cos \frac{n\pi}{l} x \right\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 展开的 Fourier 系数. 记

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N \varphi'_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

$$T_N(x) = \sum_{n=1}^N \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

由于特征函数系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 和特征函数系 $\left\{ \cos \frac{n\pi}{l} x \right\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 的完备性, 我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^l |\varphi'(x) - S_N(x)|^2 dx = 0, \quad (4.71)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^l |\psi(x) - T_N(x)|^2 dx = 0. \quad (4.72)$$

由 Bessel 不等式, 我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi'_n)^2 \leq \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx. \quad (4.73)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 \leq \int_0^l |\psi(x)|^2 dx. \quad (4.74)$$

考虑混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in Q_T, \\ u_N(x, 0) = S_N(x), & x \in [0, l], \\ \frac{\partial}{\partial t} u_N(x, 0) = T_N(x), & x \in [0, l], \\ u_N(0, t) = u_N(l, t) = 0, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.75)$$

其中 $Q_T = (0, l) \times (0, T)$. 由定理 4.8 知混合问题 (4.75) 存在惟一解 $u_N(x, t)$, 且可以表示成

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(A_n \cos \frac{na\pi}{l} t + B_n \sin \frac{na\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

这里

$$A_n = \varphi_n = \frac{l}{n\pi} \varphi'_n, \quad B_n = \frac{l}{na\pi} \psi_n.$$

显然, 解 $u_N(x, t)$ 是级数 (4.46) 的前 N 项部分和. 在混合问题 (4.75) 的方程两边乘以 $\zeta(x, t) \in \mathcal{D}$, 分部积分得

$$\iint_{Q_T} u_N(\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx}) dx dt + \int_0^l S_N(x) \zeta_t(x, 0) dx$$

$$- \int_0^l T_N(x) \zeta(x, 0) dx = 0. \quad (4.76)$$

令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{na\pi}{l} t + B_n \sin \frac{na\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

这里 A_n, B_n ($n = 1, 2, \dots$) 如上定义. 我们先证明它是 $u_N(x)$ 的极限函数. 记

$$\begin{aligned} r_N(x, t) &= u(x, t) - u_N(x, t) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{na\pi}{l} t + B_n \sin \frac{na\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} |r_N(x, t)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n| + |B_n| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{l}{n\pi} \left(|\varphi'_n| + \frac{1}{a} |\psi_n| \right) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|\varphi'_n|^2 + \frac{1}{a^2} |\psi_n|^2 \right), \end{aligned}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 利用不等式 (4.73), (4.74) 得 $u_N(x, t)$ 一致收敛到 $u(x, t)$.

由于 $u_N(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, 因而 $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$. 注意到等式 (4.71) 和 (4.72), 从等式 (4.76) 我们得到

$$\iint_{Q_T} u(\zeta_{tt} - a^2 \zeta_{xx}) dx dt + \int_0^l \varphi(x) \zeta_t(x, 0) dx - \int_0^l \psi(x) \zeta(x, 0) dx = 0.$$

定理至此得到证明.

附注 4.13 定理 4.13 和推论 4.12 实际上说明定解问题 (4.59) 在广义解的框架下仍然是适定的.

§4.3 习 题

1. 用特征线法求解下列 Cauchy 初值问题:

$$(1) \begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbf{R}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_t + 2u_x + u = xt, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = 2 - x, & x \in \mathbf{R}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2u_t - u_x + xu = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = 2xe^{x^2/2}, & x \in \mathbf{R}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u_t + (1 + x^2)u_x - u = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \arctan x, & x \in \mathbf{R}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} u_t + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}u + cu = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad \text{这里 } \mathbf{A} \in \mathbf{R}^n \text{ 是常向量, } c \in \mathbf{R} \text{ 是常数.}$$

2. 用特征线法求解拟线性方程的 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是一个递增函数. (提示: 考虑特征线 $\frac{dx}{dt} = u$)

3. (1) 设 $u = u(x, y)$ 在凸连通区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 上满足方程

$$u_{xy} = 0.$$

求此方程的所有解.

(2) 设 a 为正常数. 利用变量替换 $\xi = x + at, \eta = x - at$ 证明

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

当且仅当 $u_{\xi\eta} = 0$.

(3) 利用 (1), (2) 推导 D'Alembert 公式.

4. 设 $ABCD$ 表示 $\mathbf{R}_+^2$ 上的一个平行四边形, 其中两条边 AB, CD 平行于波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ ($a > 0$) 的一条特征线 $x - at = 0$, 另两条边 AD, BC 平行于波动方程的另一条特征线 $x + at = 0$. 这样的平行四边形称为**特征平行四边形**. 设 $u(x, t)$ 是波动方程的解. 证:

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

其中 $u(A), u(B), u(C), u(D)$ 分别表示函数 u 在平行四边形顶点 A, B, C, D 处的函数值.

5. 假设电场强度 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ 和磁场强度 $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ 满足 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathbf{B}, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{curl } \mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

这里 c 为光速. 证明: 它们的分量 $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$ 满足波动方程

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0.$$

6. 证明: 方程

$$\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

的通解可以表示成

$$u(x, t) = \frac{F(x - at) + G(x + at)}{h - x},$$

其中 F, G 是任意二次连续可微函数, $h > 0, a > 0$ 为常数. (提示: 考虑函数替换 $v = (h - x)u$)

7. 直接用特征线法来求解初值问题 (4.13).

8. 直接验证定理 4.2 和推论 4.3.

9. 当初值 $u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$ 满足什么条件时, 一维齐次波动方程的初值问题的解仅由右行波组成 (即通解为 $G(x - at)$ 的形式)?

10. 已知初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > ax, \\ u|_{t=ax} = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=ax} = u_1(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

其中 $a \neq \pm 1$. 若初值在 $b \leq x \leq c$ 上给定, 试问它的解在什么区域确定.

11. 证明: 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 6(x + t), & x \in \mathbf{R}, t > x, \\ u|_{t=x} = 0, & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=x} = \psi(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $\psi(x) - 3x^2 = \text{const}$; 若上述问题有解, 则问题的解不是惟一的. 试问: 当在直线 $t = ax$ 上给定初值时, 为什么在 $a = \pm 1$ 和 $a \neq \pm 1$ 的情形, 关于解的存在惟一性的结论完全不同?

12. 设 $a > 0$ 为常数. 利用 Fourier 变换求解三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z, t), & (x, y, z, t) \in \mathbf{R}_+^4, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3. \end{cases}$$

13. 设 $a > 0$ 为常数. 利用 Fourier 变换求解二维波动方程初值

问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t), & (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^3, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

14. 设 $u = u(x, y, z, t)$ 是三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & (x, y, z, t) \in \mathbf{R}_+^4, \\ u|_{t=0} = f(x) + g(y), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ u_t|_{t=0} = \varphi(y) + \psi(z), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

的解, 其中 $a > 0$ 为常数. 求解的表达式.

15. 设函数 $\Phi \in C^2(\mathbf{R})$, 向量 $\alpha \in \mathbf{R}^n$ 且 $|\alpha| = 1$, 则 $\Phi(\alpha \cdot x + at)$ 满足 n 维波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0,$$

这里 $a > 0$ 为常数, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. 波动

方程的这种形式的解称为平面波解.

16. 设 a 为正常数. 证明: 三维波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}_+^4$$

的所有径向对称的解可以表示为

$$u(x, t) = \frac{F(|x| - at) + G(|x| + at)}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

17. 设 a 为正常数. 求解下列多维初值问题:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^3, \\ u|_{t=0} = x^2(x + y), \quad u_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & (x, y, z, t) \in \mathbf{R}_+^4, \\ u|_{t=0} = x^2 + y^2z, \quad u_t|_{t=0} = 1 + y, & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3. \end{cases}$$

18. 设 a 为正常数, 函数 $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0, +\infty)$, $g(t) \in C^2[0, +\infty)$ 满足相容性条件

$$g(0) = \varphi(0), \quad g'(0) = \psi(0), \quad g''(0) = a^2 \varphi''(0).$$

试求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

19. 试给出半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u_x(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

有古典解的相容性条件.

20. 利用惟一性结果直接证明: 当初值 $\varphi(x), \psi(x)$ 和非齐次项 $f(x, t)$ 是关于 x 的偶函数时初值问题 (4.13) 的解 $u(x, t)$ 也是关于 x 的偶函数. 根据以上事实, 用延拓法求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

并说明当 $f(x, t)$ 满足什么条件时, 导出的形式解确实是问题的解. 这里 a 为正常数.

21. 利用延拓法求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ u_x(0, t) = A \sin \omega t, & t \geq 0, \end{cases}$$

并给出物理解释. 这里 a 为正常数, A 为常数.

22. 设 $u = u(x, y, t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - 4(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^3, \\ u(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

的解, 其中当 $(x, y) \in \Omega$ 时, $\psi(x, y) \equiv 0$; 当 $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \Omega$ 时, $\psi(x, y) > 0$. 这里 Ω 是正方形 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. 试指出当 $t > 0$ 时, $u(x, y, t) \equiv 0$ 的区域.

23. 设 $u = u(x, t)$ 是半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

的解, 其中 a 为正常数, 且

$$\begin{aligned} \varphi(x), \psi(x) &\begin{cases} = 0, & x \in [0, 1], \\ > 0, & x \in (1, +\infty); \end{cases} \\ g(t) &\begin{cases} = 0, & t \in [0, 1], \\ > 0, & t \in (1, +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

试指出当 $t > 0$ 时, $u(x, t) \equiv 0$ 的区域.

24. 试问: 半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t + u_x = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

能否直接用对称开拓法求解? 为什么? 试用特征线法求解此半无界问题. (提示: 利用等式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right)$$

将方程化为两个一阶的方程)

25. 求解 Goursat 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > |x|, \\ u|_{t=-x} = \varphi(x), & x \leq 0, \\ u|_{t=x} = \psi(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\varphi(0) = \psi(0)$. 如果 $\varphi(x)$ 在 $(-a, 0]$ ($a > 0$) 上给定, $\psi(x)$ 在 $[0, b]$ ($b > 0$) 上给定, 试指出此定解条件的决定区域.

26. 求解 Darboux 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \\ u|_{x=0} = \varphi(t), & t \geq 0, \\ u|_{x=t} = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\varphi(0) = \psi(0)$. 如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 都在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上给定, 试指出此定解条件的决定区域.

27. 求解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \\ u|_{x=t} = \varphi(t), & t \geq 0, \\ u_x|_{x=0} = \psi(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 都在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上给定, 试指出此定解条件的决定区域.

28. 求解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, \\ u|_{x=t} = \varphi(t), & t \geq 0, \\ (-u_x + u)|_{x=0} = \psi(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 都在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上给定, 试指出此定解条件的决定区域.

29. 在区域 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上考虑一阶方程

$$u_t + au_x = 0 \quad \text{或} \quad u_t - au_x = 0$$

满足初边值条件

$$u|_{x=0} = g(t), \quad t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geq 0$$

的初边值问题, 这里 $a > 0$ 是常数. 试问对于哪一个方程上述初边值条件提法正确? 为什么? 对提法正确的初边值问题求解, 并说明对 $g(t), \varphi(x)$ 提什么条件, 所得的解是属于 C^1 的解.

30. 求解并证明初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

解的惟一性, 其中 $a \in \mathbf{R}_+, b \in \mathbf{R}$ 为常数. (提示: 考虑二维初值问题)

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}) = \tilde{f}(x, y, t), & (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^3, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \\ \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \end{cases}$$

其中解 $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t) = u(x, t)v(y)$, 右端项 $\tilde{f}(x, y, t) = f(x, t)v(y)$, 初值 $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)v(y)$, $\tilde{\psi}(x, y) = \psi(x)v(y)$, 辅助函数 $v(y)$ 满足方程 $v''(y) = -\frac{b}{a^2}v(y)$

31. 求解并证明初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu_t + cu_x + du = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

解的惟一性, 其中 $a \in \mathbf{R}_+$, $b, c, d \in \mathbf{R}$ 为常数. (提示: 先作函数变换 $v(x, t) = e^{\frac{1}{2}(bt - \frac{c}{a^2}x)} u(x, t)$ 将此问题化为上面的问题, 然后求解)

32. 设 a 为正常数. 证明半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \\ u_x(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

解的惟一性.

33. 证明 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

解的惟一性, 其中 $b(x, t), c(x, t)$ 是有界连续函数, $a > 0$ 为常数.

34. 利用能量不等式证明一维波动方程带有第二或第三边值问题的混合问题解的惟一性.

35. 根据附注 4.8 的思路, 证明关于半无界问题 (4.21) 的能量不等式并利用能量不等式证明此定解问题解的惟一性.

36. 利用能量模估计的技巧和多维空间中的 Gauss-Green 公式证明定理 4.7.

37. 设 $u \in C^2(\bar{\mathbf{R}}_+^2)$ 满足 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

其中 a 为正常数, $\varphi(x), \psi(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$. 证明:

(1) 设 $x_1 < x_2$, 对于任意 $t \geq 0$, 成立能量估计

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t^2(x, t) + a^2 u_x^2(x, t)] dx \leq \int_{x_1 - at}^{x_2 + at} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx;$$

(2) 对于任意 $t \geq 0$, 成立能量不等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(u_t^2(x, t) + a^2 u_x^2(x, t))] dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx;$$

(3) 对于任意 $t \geq 0$, 成立能量恒等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [u_t^2(x, t) + a^2 u_x^2(x, t)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2] dx.$$

38. 设函数 $u \in C^2(\bar{\mathbf{R}}_+^2)$ 满足第 37 题的 Cauchy 初值问题且 $\varphi(x), \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. 记其动能和势能分别为

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x, t) dx, \quad p(t) = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x, t) dx.$$

证明:

(1) $k(t) + p(t)$ 是与 t 无关的常数;

(2) 当 t 足够大时, $k(t) = p(t)$.

(提示: 利用 D'Alembert 公式和附注 4.2 的表达式, 则

$$u_t(x, t) = aF'(x + at) - aG'(x - at),$$

$$u_x(x, t) = F'(x + at) + G'(x - at),$$

其中 $F' = \frac{1}{2a}(a\varphi' + \psi)$, $G' = \frac{1}{2a}(a\varphi' - \psi)$)

39. 设函数 $u \in C^2(\bar{\mathbf{R}}_+^4)$ 满足 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^4, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

其中 a 为正常数, $\varphi(x), \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. 证明: 存在常数 C , 使得对于所有的 $(x, t) \in \mathbf{R}_+^4$, 成立

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}.$$

(提示: 利用 Kirchhoff 公式 (4.33))

40. 设 a, h 为正常数, A_1, A_2 为常数. 用分离变量法求解下列混合问题:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = x(x - 2l), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 1, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = A_1 t, \quad u_x(\pi, t) = A_2 t, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{l} x, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x|_{x=0} = (u_x + hu)|_{x=l} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

41. 设 a 为正常数, A, w, A_1 为常数. 用分离变量法求解下列混合问题:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \frac{\pi}{l} x, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + 2u_t = x(l - x), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{Ax^2}{l^2}, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = A \sin \omega t, \quad u(l, t) = 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

分别讨论产生共振和不产生共振两种情形.

$$(5) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x|_{x=0} = A_1 t, \quad (u_x + u)|_{x=l} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

42. 求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \frac{2}{x} u_x = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

(提示: 函数 $v(x, t) = xu(x, t)$ 满足 $v_{tt} - v_{xx} = 0$)

43. 用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0, \\ u|_{t=0} = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ u_t|_{t=0} = y(1-y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, & 0 \leq y \leq 1, t \geq 0, \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0. \end{cases}$$

44. 设 $u(x, t)$ 满足混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ (-u_x + \alpha u)|_{x=0} = g_1(t), & t \geq 0, \\ (u_x + \beta u)|_{x=l} = g_2(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 a 为正常数. 试引进辅助函数, 将边值条件齐次化. 设

$$(1) \alpha > 0, \beta > 0; \quad (2) \alpha = \beta = 0.$$

在以下问题中记 $Q_T = (0, l) \times (0, T)$.

45. 设 $u(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$ 满足混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 a 为正常数. 试推导能量不等式.

46. 设 $u(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$ 满足混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ (-u_x + \alpha u)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + \beta u)|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 $a, \alpha, \beta > 0$ 为常数. 试推导能量不等式.

47. 设 $u(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T) \cap C^2(Q_T)$ 满足混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad (u_x + u)|_{x=l} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 a 为正常数. 试推导能量不等式.

48. 考虑定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

试问: 对 φ, ψ, f 提什么条件才能保证由分离变量法所得的解是古典解? 试证明之.

49. 试引入定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

的广义解的定义. 试问: 对 φ, ψ, f 提什么条件才能保证上述定解问题的广义解的存在惟一性? 试证明之.

50. 设 $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$ 是混合问题 (4.59) 的广义解. 证明:

$$(1) u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l];$$

$$(2) \text{ 如果 } u(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T), \text{ 则 } u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l].$$

习题答案与提示

第一章

1. 令 $g(t) = f(tx)$, $t \in [0, 1]$. 考虑函数 $g(t)$ 在 $t = 0$ 的 Taylor 展开式, 取 $t = 1$.
2. $y = 0$, $y = 1$ 和 $y = -1$ 都是方程的特解. 在方程两端同乘 y' , 再积分, 于是得到一阶常微分方程

$$(y')^2 = \frac{1}{2}y^4 - y^2 + c_1.$$

为简单起见, 取 $c_1 = \frac{1}{2}$, 于是可得一个方程

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2 - 1).$$

解之, 可得一组特解

$$y = \frac{1 + ce^{\sqrt{2}x}}{1 - ce^{\sqrt{2}x}},$$

其中 c 为任意常数.

3. 利用数学归纳法.
4. (1) 在 Gauss-Green 公式中取 $\mathbf{F} = (0, \dots, uv, \dots, 0)$, 移项即证;
(2) 在 Gauss-Green 公式中取 $\mathbf{F} = \nabla u$, 即证;
(3) 在 Gauss-Green 公式中取 $\mathbf{F} = u\nabla v$, 即证;
(4) 利用 (3), 交换 u 和 v , 得到另一等式. 与 (3) 中等式比较, 即证.
5. (1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时, 方程可化为 $u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = g(x_1, y_1, u_{x_1}, u_{y_1})$;
(2) 当 $B^2 - AC = 0$ 时, 方程可化为 $u_{x_1x_1} = g(x_1, y_1, u_{x_1}, u_{y_1})$;
(3) 当 $B^2 - AC > 0$ 时, 方程可化为 $u_{x_1x_1} - u_{y_1y_1} = g(x_1, y_1, u_{x_1}, u_{y_1})$.
6. 设 $x = ax_1 + by_1$, $y = cx_1 + dy_1$, 然后在各种条件下化简方程.
(1) 令 $x_1 = x$, $y_1 = -x + y$, 则 $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = 0$;

(2) 令 $x_1 = x$, $y_1 = -x + y$, 则 $u_{x_1x_1} = 0$;

(3) 令 $x_1 = x$, $y_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y$, 则 $u_{x_1x_1} - u_{y_1y_1} = 0$.

7. (1) 方程系数矩阵的一个特征值为 $\frac{n+1}{2}$, 另一个 $n-1$ 重特征值为 $\frac{1}{2}$, 因此方程的标准型为

$$\Delta u = u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} + \dots + u_{y_ny_n} = 0.$$

(2) 方程系数矩阵的一个特征值为 $\frac{n-1}{2}$, 另一个 $n-1$ 重特征值为 $-\frac{1}{2}$, 因此方程的标准型为

$$u_{y_1y_1} - (u_{y_2y_2} + \dots + u_{y_ny_n}) = 0.$$

第二章

1. 令 $f(\varepsilon) = F(u + \varepsilon\phi)$, 其中 $u \in M_g$,

$$F(v) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + |Dv|^2} \, dx dy.$$

计算 $f'(0) = 0$, 分部积分得到极小曲面方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = 0.$$

2. $V = \{1, x_i, x_1^2 - x_j^2, x_k x_l \mid i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n; k, l = 1, \dots, n, k \neq l\}$ 是所求空间的一组基, 故维数为 $(n^2 + 3n)/2$.
3. 直接计算即得.
4. 在引理 2.11 中, 取 $v = \frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}$, u 为问题的解, 在区域 $B(0, r) \setminus B(0, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 上应用引理. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即证.
5. 在引理 2.11 中, 取 $v = \ln|x| - \ln r$, u 为问题的解, 在区域 $B(0, r) \setminus B(0, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 上应用引理. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即证.
6. (1) 参照平均值公式 (2.5) 的证明.
(2) 分两种情形证明. 若 v 的最大值在边界 $\partial\Omega$ 达到, 即证. 若 v 的最

大值在 Ω 内部达到, 则存在 $x_0 \in \Omega$ 使得 $v(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} v(x)$. 令

$$A = \{x \in \bar{\Omega} | v(x) = v(x_0)\}.$$

于是 A 非空, 且为闭集. 利用 (1) 证明 A 为开集. 因此 $\bar{\Omega} = A$, 从而证明 v 在 Ω 上是常数.

(3) 直接求导数利用凸函数的二阶导数非负可得结论.

(4) 直接验证可得结论.

7. 由于 $\max_{x \in \bar{\Omega}} |u_n - u_m| \leq \max_{x \in \partial \Omega} |u_n - u_m|$, 因此 $\{u_n\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛到函数 u . 由于 u_n 满足平均值公式, 则 u 满足平均值公式. 利用定理 2.3' 即证.

8. 利用平均值公式的推论, 这里只需证明对于任意 $x_0 \in B(0, 1)$, 存在 $r_0 > 0$, 使得平均值公式在所有球 $B(x_0, r)$ ($0 < r \leq r_0$) 上成立.

9. 经计算可得 $\Delta_x K[u](x) = |x|^{-n-2} \Delta_{x^*} u(x^*)$. 于是, 当 u 是 Ω 上的调和函数时, $K[u]$ 是 Ω^* 上的调和函数. 又由于 $K[K[u]] = u$, 当 $K[u]$ 是 Ω^* 上的调和函数时, u 是 Ω 上的调和函数.

10. (1) 在球 $B(0, R)$ 上利用平均值公式和 Cauchy-Schwarz 不等式;

(2) 在球 $B(x, R - |x|)$ 上利用平均值公式和 Cauchy-Schwarz 不等式.

11. 利用定理 2.7 的第一步证明可得

$$|u_{x_i}(x)| \leq \frac{n+1}{r} M,$$

其中 $B(x, r) \subset B(0, 1)$, $M = \sup_B |u|$. 取 $r = 1 - |x|$, 即证.

12. (1) 对调和函数 $w(x) = u(x) - \inf_{B(0, R)} u$ 在球 $B(0, \frac{R}{2})$ 上利用 Harnack 不等式.

(2) 对任意 $R \in (0, R_0)$, 一定存在正整数 $i \geq 1$, 使得 $\frac{R_0}{2^i} \leq R < \frac{R_0}{2^{i-1}}$.

13. 由定理 2.7 可得, 对于 $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$,

$$\begin{aligned} |D^{m+1} u(x)| &\leq \frac{C_0}{r^{n+m+1}} \int_{B(x, r)} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{C_3}{r^{n+m+1}} [(r + |x|)^{n+m} + C_4]. \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow \infty$, 则得 $D^{m+1} u \equiv 0$. 得证.

14. 作变量替换 $y = x + rz$, 得到

$$u_r(x) = \frac{1}{N\omega_n} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

然后求导数, 再作变量替换 $z = (y - x)/r$.

15. (1) 注意 u 的非负性, 利用 Poisson 公式和平均值公式.

(2) 利用 (1) 易得结论.

16. 考虑非负调和函数 $v = M - u$, 在上述 Harnack 不等式中令 $R \rightarrow +\infty$, 即得结论.

17. 考虑特殊情形 $u \equiv 1$ 即得结论.

18. (1) $G(x, y) = \Gamma(y - x) - \Gamma(y - \tilde{x})$, 这里 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\tilde{x} = (x_1, -x_2)$.

(2) $G(x, y) = \Gamma(y - x) - \Gamma(y + x) - \Gamma(y - \tilde{x}) + \Gamma(y + \tilde{x})$, 这里 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\tilde{x} = (x_1, -x_2)$.

(3) 参阅文献 [8] 中 204 页附注 2.

19. 分别考虑 $n = 2$ 和 $n = 3$ 两种情形. 我们得

$$G(x, y) = \Gamma(y - x) - \Gamma(y + x) + \Gamma\left(\frac{|x|}{R}(y + x^*)\right) - \Gamma\left(\frac{|x|}{R}(y - x^*)\right),$$

这里 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x^* = R^2 x / |x|^2$.

20. 先求相应的 Green 函数, 再求解的表达式.

21. (1) 不妨设 u 在 $x_0 \in \Omega$ 达到非负最大值, 比较两端符号.

(2) 不妨设原点 $0 \in \Omega$, 并令 $u(x) = w(x)v(x) = (d^2 - |x|^2 + 1)v(x)$, 然后考虑 $v(x)$ 满足的方程, 利用 (1) 的证明方法可得 $v(x)$ 的最大模估计, 从而得到 $u(x)$ 的最大模估计.

(3) 例如取 $c = -1$, $f(x) \equiv 0$, 在特殊区域上构造非零解.

22. 考虑函数 $v(x) = u(x) + \frac{1}{2}|x - x_0|^2$, 则 v 为 Ω 上的调和函数. 由于 $v(x)$ 的最大值和最小值在 $\partial\Omega$ 上达到, 即得此不等式.

23. (1) 分别考虑两种情形. 情形 1: u 在 $x_0 \in \Omega$ 达到非负最大值; 情形 2: u 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 达到非负最大值. 比较两端符号.

(2) 令 $u(x) = w(x)v(x)$, 其中 $w(x)$ 是待定的辅助函数. 在球 B 上考

考虑 $v(x)$ 满足的边值问题.

24. 仿照 Hopf 引理的证明.

25. 先证明 $u_i(x) \geq 0$, 然后考虑 $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 满足的定解问题.

26. 先在区域 $B(0, R) \setminus \Omega_0$ 上证明关于 $u(x)$ 的估计, 然后令 $R \rightarrow +\infty$.

27. 先假设 $x_0 \in \bar{\Omega}$ 满足 $|u(x_0)| = \max_{\bar{\Omega}} |u(x)|$, 然后分别就 $u(x_0) \geq 0$ 与 $u(x_0) \leq 0$ 讨论. 同样考虑在内部或边界达到最大值的情形.

28. 令 $f(u) = u - u^3 = u(1 - u^2)$. 若存在 $x_0 \in \Omega$, 使得 $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u > 1$ 或 $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u < -1$, 则可从方程导出矛盾.

29. 考虑 $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 满足的定解问题, 注意零阶项的系数的符号.

30. 不妨设原点 $0 \in \Omega$. 考虑 $w(x) = u(x) + \varepsilon(e^{Mx_1} - e^{Mx_2})$ 满足的定解问题, 其中 $M = \sup_{x \in \Omega} |A(x)| + 1$, d 为 Ω 的直径.

31. 考虑 $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ 满足的定解问题, 利用上一题的结论.

32. 分别考虑 u 的最大值和最小值在 Ω 内部或边界达到情形.

33. 当 u 的最大值大于或等于 v 的最大值时, 在 u 的最大值点用第一个方程; 当 v 的最大值大于或等于 u 的最大值时, 在 v 的最大值点用第二个方程. 类似地考虑最小值.

34. 先在区域 $\Omega \setminus \bar{B}(0, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 上应用极值原理, 然后令 $\varepsilon \rightarrow 0$.

35. (1) 分别考虑 u 的最大值和最小值在 Ω 内部或边界达到情形.

(2) 令 $u(x, y) = w(x)v(x, y)$, 其中 $w(x)$ 是待定的辅助函数. 在上半球 B^+ 上考虑 $v(x, y)$ 满足的问题, 利用 (1) 的结论.

36. 只需证明齐次边值问题的有界解必为零解. 首先在 B_R^+ 上考虑辅助函数 $w(x, y) = \varepsilon \ln [x^2 + (y+1)^2] \pm u(x)$, 其中 ε 是任意正常数, R 为足够大的正数. 然后令 $R \rightarrow +\infty$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$.

37. 只需证明齐次边值问题的有界解必为零解. 在 $\Omega \setminus \bar{B}_\delta(x_0)$ 上考虑辅助函数 $w(x) = \varepsilon/|x - x_0|^{n-2} \pm u(x)$, 其中 d 是 Ω 的直径, ε 是任意正常数, δ 为足够小的正数. 然后令 $\delta \rightarrow 0$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$.

38. 只需证明齐次边值问题的有界解必为零解. 在 $\Omega \setminus \bar{B}_\delta(x_0)$ 上考虑辅助函数 $w(x) = \varepsilon \ln (d/|x - x_0|) \pm u(x)$, 其中 d 是 Ω 的直径, ε 是任意正常数, δ 为足够小的正数. 然后令 $\delta \rightarrow 0$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$.

39. (1) 当 $n \geq 3$ 时, 考虑辅助函数 $w(x) = \varepsilon/|x - x_0|^{n-2} \pm [u(x) - v(x)]$, 其中 ε 是任意正常数. (2) 当 $n = 2$ 时, 考虑辅助函数 $w(x) = -\varepsilon \ln |x - x_0| \pm [u(x) - v(x)]$.

40. 只需证明齐次边值问题的解必为零解. 在方程两端同乘 u , 然后分部积分, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得证.

41. 只需证明齐次边值问题的解必为零解. 在方程两端同乘 u , 然后分部积分即证.

第三章

$$1. (1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a \sin a\lambda}{\lambda} + \frac{\cos a\lambda - 1}{\lambda^2} \right); \quad (2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\lambda}{a\lambda^2};$$

$$(3) \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin a(\lambda + \lambda_0)}{\lambda + \lambda_0} - \frac{\sin a(\lambda - \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \right); \quad (4) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2};$$

$$(5) \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a^2 + (\lambda - 1)^2} + \frac{1}{a^2 + (\lambda + 1)^2} \right).$$

$$2. (1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2 \sin a\lambda}{\lambda^3} - \frac{a^2 \sin a\lambda}{\lambda} - \frac{2a \cos a\lambda}{\lambda^2} \right); \quad (2) -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2ai\lambda}{(a^2 + \lambda^2)^2};$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mu - i\lambda} \left(e^{a(\mu - i\lambda)} - e^{-a(\mu - i\lambda)} \right);$$

$$(4) -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(a\lambda_0 i)\lambda}{(a^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)(a^2 + (\lambda + \lambda_0)^2)};$$

$$(5) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[a(\lambda - \lambda_0)]}{\lambda - \lambda_0}; \quad (6) \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{1}{4a}(\lambda - b)^2 + c};$$

$$(7) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|\lambda|}}{a}; \quad (8) -i \operatorname{sign} \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\lambda|};$$

$$(9) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + a|\lambda|}{2a^3} e^{-a|\lambda|}.$$

$$3. (1) \frac{1}{\sqrt{2a^2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}; \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2a^2t}} e^{-\frac{1}{4a^2t}(x-bt)^2 - ct};$$

$$(3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

4. (1) 对方程和初条件两边关于 x 作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + (a^2\lambda^2 + b\lambda + c)\hat{u} = \hat{f}(\lambda, t), \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, t)$ 是解 $u(x, t)$ 关于 x 的 Fourier 变换. 解这个常微分方程的初值问题得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}e^{-(a^2\lambda^2 + b\lambda + c)t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau)e^{-(a^2\lambda^2 + b\lambda + c)(t-\tau)} d\tau, \quad t > 0.$$

然后对两边求 Fourier 逆变换, 利用上一题 (2) 的结论得到

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi, t)\varphi(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi, t - \tau)f(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned}$$

其中核函数

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a^2t}} e^{-\frac{1}{4a^2t}(x-bt)^2 - ct}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

(2) 固定 $y > 0$, 对方程和初条件两边关于 x 作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}}{dy^2} - \lambda^2\hat{u} = 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, y)$ 是解 $u(x, y)$ 关于 x 的 Fourier 变换. 求解出这个常微分方程的初值问题的解

$$\hat{u}(\lambda, y) = e^{-|\lambda|y}\hat{\varphi}, \quad y > 0.$$

然后对两边求 Fourier 逆变换, 利用上一题 (3) 的结论得到

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi.$$

$$5. (1) [F(\lambda)]^\vee = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)); \quad (2) [F(\lambda)]^\vee = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

6. 对方程和初条件两边关于 x 作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + a^2\lambda^2\hat{u} = 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \Phi(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda), \\ \hat{u}_t(\lambda, 0) = \Psi(\lambda) = \hat{\psi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, t)$ 是解 $u(x, t)$ 关于 x 的 Fourier 变换. 解这个常微分方程的初值问题得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \Phi(\lambda) \cos a\lambda t + \Psi(\lambda) \frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}, \quad t > 0.$$

然后对两边求 Fourier 逆变换, 利用上一题的结论得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

7. 对方程作 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{\hat{f}}{|\lambda|^2 + 1}.$$

然后对两边求 Fourier 逆变换, 得

$$u(x) = \frac{(f * B)(x)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}},$$

其中 $\hat{B} = \frac{1}{1 + |\lambda|^2}$. 参阅文献 [3] 中 187 页的计算, 得到

$$B(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t - \frac{|x|^2}{t}}}{t^{\frac{n}{2}}} dt.$$

从而得到

$$u(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{e^{-t - \frac{|x-y|^2}{t}}}{t^{\frac{n}{2}}} f(y) dy dt.$$

8. 仿照多维热方程的求解过程, 形式上我们可以得到公式

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x - \xi, t)\varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n} K(x - \xi, t - \tau)f(\xi, \tau) d\xi,$$

这里
$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

9. 对方程和初条件两边关于 x 作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + |\lambda|^4 \hat{u} = \hat{f}(\lambda, t), \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \Phi(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, t)$ 是解 $u(x, t)$ 关于 x 的 Fourier 变换. 解这个常微分方程的初值问题得

$$\hat{u}(\lambda, t) = e^{-|\lambda|^4 t} \Phi(\lambda) + \int_0^t e^{-|\lambda|^4(t-\tau)} \hat{f}(\lambda, \tau) d\tau, \quad t > 0.$$

再两边求 Fourier 逆变换得到

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x - \xi, t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} K(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

其中
$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi\sqrt{t})^{n/2}} K\left[\frac{x}{t^{1/4}}\right], & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

这里
$$K(x) = [e^{-|\xi|^4}]^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\xi|^4} \cos(\xi \cdot x) d\xi.$$

10. 直接验证即可.

11. 直接验证即可.

12. 作 Hopf-Cole 变换 $w = e^{-bu/a^2}$ 得到热方程

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = f(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ w(x, 0) = e^{-\frac{b\varphi(x)}{a^2}}, & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

于是
$$w(x, t) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}} e^{-\frac{b\varphi(\xi)}{a^2}} d\xi,$$

从而得到

$$u(x, t) = -\frac{a^2}{b} \ln \left(\frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}} e^{-\frac{b\varphi(\xi)}{a^2}} d\xi \right).$$

13. 作函数变换 $v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(y, t) dy$, 将问题转化为上一问题, 最后

得到
$$u(x, t) = \frac{\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t} - \frac{\psi(\xi)}{2a^2}} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t} - \frac{\psi(\xi)}{2a^2}} d\xi},$$

其中
$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy.$$

14. 作函数变换 $v(x, t) = U[u(x, t)]$ 得到热方程

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \\ v(x, 0) = \psi(x) = U(\varphi(x)), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

于是
$$v(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi,$$

从而得到

$$u(x, t) = U^{-1}(v(x, t)) = U^{-1} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} U(\varphi(x)) d\xi \right).$$

15. 先求解方程

$$\frac{U''(u)}{U'(u)} = -f(u),$$

将问题化为上一问题, 然后求解.

16. 对给定的 $\varphi \in C([0, 1])$, 延拓 φ 到 $\mathbf{R}$ 上, 求解初值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

其求解步骤如下: (1) 证明当 $t \rightarrow 0$ 时, $u(x, t)$ 一致收敛到 $\varphi(x)$; (2) 将 $u(x, t)$ 用基本解 $K(x, t)$ 表示出来; (3) 用多项式逼近基本解 $K(x, t)$.

17. 令 $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$, 然后将 $v(x, t)$ 奇延拓到 $x < 0$, 得到

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -g''(t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

利用 Poisson 公式求解, 再分部积分即证.

18. (1) $u(x, t) = \sin x$; (2) $u(x, t) = e^{-a^2 t} \cos x$;

$$(3) u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{l} x, \text{ 其中}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 (l-x)^2 \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx, \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$(4) \text{ 令 } v(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{2\pi} [(x-\pi)^2 A_1 t - x^2 A_2 t], \text{ 得到}$$

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = \frac{1}{2\pi} [A_1 (x-\pi)^2 - A_2 x^2 - 2(A_1 - A_2)t], & 0 < x \leq \pi, t > 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ v_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

再利用上一小题的特征函数求解;

$$(5) \text{ 令 } v(x, t) = u(x, t) + \frac{x^2}{2\pi}, \text{ 得到}$$

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -\pi^{-1}, & 0 < x \leq \pi, t > 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0, t) = 0, \quad v_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

再利用分离变量法求解.

$$19. (1) G(x, t; \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} H(t-\tau),$$

其中 $H(t)$ 表示 Heaviside 函数, 其定义为

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

$$(2) G(x, t; \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} \xi \cos \frac{n\pi}{l} x e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} H(t-\tau).$$

(3) 解方程 $\tan \mu l = -\mu$ 得到无穷多个 μ_n , 且

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} < \mu_n < \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

此时所有特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad X_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x \quad (n = 1, 2, \dots),$$

Green 函数为

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \mu_n \xi + \mu_n \cos \mu_n \xi \right) \left(\sin \mu_n x \mu_n \cos \mu_n x \right) + \mu_n \cos \mu_n x \\ \cdot e^{-\mu_n^2 a^2 (t-\tau)} H(t-\tau).$$

20. 先将边值齐次化, 然后利用 Green 函数得到表达式, 再分部积分以降低边值的光滑性要求. 可参见参考文献 [8] 中第三章第二节.

21. 将此问题简化为无热源或有热源的一维热方程混合问题.

(1) 此时问题为

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

再利用分离变量法求解得到

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

其中

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

由于

$$|\varphi_n| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi(x)| \, dx,$$

$$\text{不难发现 } \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) \, dx.$$

(2) 此时问题为

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = k(u_0 - u) & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 $k > 0$ 为一个导热系数. 先作变换 $v = u - u_0$, 再利用分离变量法求解得到

$$u(x, t) = u_0 + e^{-kt} \left[\frac{1}{l} \int_0^l \tilde{\varphi}(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi}{l} x \right],$$

其中 $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - u_0$, $\bar{\varphi}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$.

由于 $|\bar{\varphi}_n| \leq \frac{2}{l} \int_0^l (|\varphi(x)| + |u_0|) dx$, 且 $k > 0$, 于是 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = u_0$.

22. 设两段杆的温度分布为 u_1 和 u_2 , 则 u_1 和 u_2 分别满足

$$\begin{cases} u_{1t} - a_1^2 u_{1xx} = 0, & -l_1 < x \leq 0, t > 0, \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ u_1(-l_1, t) = 0, u_1(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_{2t} - a_2^2 u_{2xx} = 0, & 0 < x \leq l_2, t > 0, \\ u_2(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l_2, \\ u_2(0, t) = g(t), u_2(l_2, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{c_1 \rho_1}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{c_2 \rho_2}}$, $g(t)$ 为一个待求的未知函数. 原因是在连接处 $x = 0$, $u_1 = u_2$. 利用定理 3.7', 得到 u_1 和 u_2 的表达式.

再利用在连接处 $x = 0$ 的导热条件 $-k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$, 从而求出 $g(t)$.

最后求出 u_1 和 u_2 .

23. 验证 Poisson 公式 (3.9) 表示的函数 $u(x, t)$ 在区域 $\mathbf{R} \times (0, (4a^2 A)^{-1})$ 上的收敛性和无穷次可微性.

24. 先验证函数 $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, 且满足方程, 然后证明 $u(x, t)$ 满足初边值条件, 从而 $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$.

25. (1) 参照极值原理的证明.

(2) 用凸函数的二阶导数大于或等于 0 可得结论.

(3) 直接求导可得结论.

26. 由于 $w = e^{-t}u$ 满足的热方程 $w_t - \Delta w = 0$, 利用极值原理可证.

27. 令 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t) - \varepsilon t$ ($\varepsilon > 0$). 如果 $w(x, t)$ 在内部点 $(x_0, t_0) \in Q_T$ 达到最大值, 则 $w_t(x_0, t_0) \geq 0$, $w_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$, $w_x(x_0, t_0) = u_x(x_0, t_0) - v_x(x_0, t_0) = 0$. 由此导出矛盾. 因此在 $\bar{Q}_T$ 上, $u(x, t) \leq v(x, t) + \varepsilon t$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得证.

28. 令 $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, 则 $\mathcal{L}u - \mathcal{L}v = \tilde{\mathcal{L}}w = w_t - w_{xx} + c(x, t)w =$

0, 其中 $c(x, t) = u^2 + uv + v^2 \geq 0$. 因此 $w(x, t)$ 在抛物边界达到最大值, 从而得证.

29. 考虑 $v(x, t) = u_t(x, t)$ 满足的定解问题

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f_t(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ v(x, 0) = f(x, 0) + \varphi'(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

再利用定理 3.11 可得结论.

30. (1) 由相容性条件 $\varphi(0) = 0$ 和 $\varphi(l) = 0$, 得到

$$|u(x, 0)| \leq x \max_{[0, l]} |\varphi'(x)|, \quad |u(x, 0)| \leq (l - x) \max_{[0, l]} |\varphi'(x)|.$$

由比较原理可得

$$|u(x, t)| \leq x \max_{[0, l]} |\varphi'(x)|, \quad |u(x, t)| \leq (l - x) \max_{[0, l]} |\varphi'(x)|.$$

从而得证.

(2) 考虑 $v(x, t) = u_x(x, t)$ 满足的定解问题

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x \leq l, t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi'(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = u_x(0, t), v(l, t) = u_x(l, t), & t \geq 0, \end{cases}$$

再利用定理 3.11 可得结论.

31. 由定理 3.14, 先得到 $\max_{\bar{Q}_T} |u_x(x, t)|$ 的估计. 然后考虑 $v(x, t) = u_x(x, t)$ 满足的定解问题

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f_x(x, t), & 0 < x \leq l, t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi'(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = \alpha u(0, t) - g_1(t), v(l, t) = g_2(t) - \beta u(l, t), & t \geq 0, \end{cases}$$

再利用定理 3.11 可得结论.

32. 由极值原理得到 $u^{l_2}(x, t) \geq 0$, 从而有 $u^{l_1}(0, t) = u^{l_2}(0, t)$, $u^{l_1}(l_1, t) = 0 \leq u^{l_2}(l_2, t)$. 再利用比较原理可得结论.

33. (1) 利用极值原理可得 $u(x, t)$ 的最大、最小值在抛物边界上达到. 然

后再对边界情形分情况讨论.

(2) 考虑函数 $v(x, t) = u_{h_2}(x, t) - u_{h_1}(x, t)$, 这里 $0 < h_1 < h_2$, 则 v 满足定解问题

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x \leq l, t > 0, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ [-v_x + h_1 w]|_{x=0} = (h_2 - h_1)(u_0 - u^{h_2}) \geq 0, v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

再由极值原理可得结论.

34. 令 $c(x, t) = u(x, t) - b(x, t)$, 于是存在 $c_0 \geq 0$, 使得 $c(x, t) \geq -c_0$. 则 u 满足定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + c(x, t)u = 0, & 0 < x \leq l, t > 0, \\ u|_{\partial_p Q_T} \geq 0. \end{cases}$$

由文献 [8] 中第三章第三节的比较定理即得 $u \geq 0$, 从而 u 满足

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} \leq Bu, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

其中 $B = \max_{\bar{Q}_T} |b(x, t)|$. 令 $v = e^{-Bt}u$, 则

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} \leq 0, & (x, t) \in Q_T, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) = u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

由极值原理得到

$$\max_{\bar{Q}_T} v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq l} \varphi(x),$$

从而 $0 \leq u(x, t) \leq e^{BT} \max_{0 \leq x \leq l} \varphi(x)$.

35. 只需证明初值问题

$$\begin{cases} u_t - a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}_+^2, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

的有界解是零解. 首先在区域 $Q_T^L = (-L, L) \times (0, T]$ 上证明比较原

理成立, 然后考虑辅助函数 $w = Me^t(x^2 + 2At + B^2)/L^2$, 其中

$$|u(x, t)| \leq M, \quad |a(x, t)| \leq A, \quad |b(x, t)| \leq B.$$

利用已证的比较原理得到, 在 $\bar{Q}_T^L$ 上,

$$|u(x, t)| \leq w(x, t) = Me^t(x^2 + 2At + B^2)/L^2.$$

固定一点 $(x_0, t_0) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T]$, 取 $L \geq L_0$ 使得 $(x_0, t_0) \in \bar{Q}_T^L$, 从而得到

$$|u(x_0, t_0)| \leq Me^{t_0}(x_0^2 + 2At_0 + B^2)/L^2.$$

令 $L \rightarrow +\infty$, 则 $u(x_0, t_0) = 0$.

36. 在方程两端同乘以 u_t , 注意到等式

$$u_t^2 - u_t u_{xx} = u_t^2 + \frac{1}{2}(u_x^2)_t - (u_t u_x)_x,$$

方程两端在区域 $[0, l] \times [0, t]$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx + \int_0^t \int_0^l u_t^2(x, t) dx dt \\ \leq \int_0^t \int_0^l f(x, t) u_t(x, t) dx dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l u_t^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

简化上式, 对于 $t \in [0, T]$ 取上确界即证.

37. 在方程两端同乘以 u . 注意到等式

$$u(u_t - a^2 u_{xx}) = \frac{1}{2}[(u^2)_t + a^2 u_x^2] - a^2 (uu_x)_x,$$

方程两端在区域 $[0, l] \times [0, t]$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2(x) dx \\ + a^2 \int_0^t \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt - a^2 \int_0^t \int_0^l (uu_x)_x dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \int_0^l f(x, t) u(x, t) dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l u^2(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

其中利用边条件证明

$$\int_0^l (uu_x)_x dx = (uu_x)|_0^l = -\beta u^2(l, t) - \alpha u^2(0, t) \leq 0.$$

简化上式, 利用 Gronwall 不等式, 然后对于 $t \in [0, T]$ 取上确界即证.

38. 令 $g = -bu_x - cu + f$. 在方程两端同乘以 u , 注意到

$$gu \leq B|u_x||u| + Cu^2 + f|u| \leq \frac{a^2}{2} u_x^2 + \left(\frac{B^2}{2a^2} + C + \frac{1}{2}\right) u^2 + \frac{1}{2} f^2,$$

在区域 $[0, l] \times [0, t]$ 上积分, 得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2(x) dx + a^2 \int_0^t \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt \\ &\leq \int_0^t \int_0^l g(x, t) u(x, t) dx dt \\ &\leq \frac{a^2}{2} \int_0^t \int_0^l u_x^2(x, t) dx dt + \left(\frac{B^2}{2a^2} + C + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \int_0^l u^2(x, t) dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l f^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

简化上式, 利用 Gronwall 不等式, 然后对于 $t \in [0, T]$ 取上确界即证.

第四章

- (1) $u(x, t) = (x - 2t)^2$. (2) $u(x, t) = (x - 2)(t - 1) + 2 - 2e^{-t}$.
(3) $u(x, t) = (2x + t)e^{\frac{x^2}{2}}$. (4) $u(x, t) = (\arctan x - t)e^t$.
(5) $u(x, t) = e^{-ct}\varphi(x - At)$.

2. 考虑过 (x, t) 的特征线 $\frac{dx(t)}{dt} = u$. 则在此特征线上, 方程简化为

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = 0.$$

于是 $u(x(t), t) = u(x(0), 0) = \varphi(x(0))$, 从而得到

$$x - x(0) = \varphi(x(0))t.$$

不难验证对于任意 (x, t) , 上述方程有惟一解 $x(0)$. 显然 $x(0) = x - ut$, 从而解 $u = u(x, t)$ 满足隐函数方程 $u = \varphi(x - ut)$.

3. (1) $u(x, y) = F(x) + G(y)$. (2) 直接验证.

(3) $u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + at) + G(x - at)$.

4. 利用 D'Alembert 公式.

5. 直接计算得

$$\begin{aligned} E_{tt} &= c \operatorname{curl} B_t = -c^2 \operatorname{curl} [\operatorname{curl} E] \\ &= -c^2 (\nabla \operatorname{div} E - \Delta E) = c^2 \Delta E. \end{aligned}$$

同理, 可证磁场强度 B 满足波动方程.

6. 考虑函数替换 $v = (h - x)u$, 可直接验证函数 v 满足波动方程 $v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0$. 利用 D'Alembert 公式即证.

7. 仿照初值问题 (4.14) 的解法.

8. 直接计算.

9. 当且仅当 $\psi(x) = -a\varphi'(x)$ 时, 一维齐次波动方程的初值问题的解仅由右行波组成.

10. 利用两族特征线 $\frac{dx}{dt} = 1$ 和 $\frac{dx}{dt} = -1$, 及初值给定的区间 $[b, c]$ 来确定.

11. 不难验证 $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t) + t^3 - x^3$ 是方程的通解. 要使 $u(x, t)$ 满足 $u|_{t=x} = 0$, 当且仅当 $G(x) = -F(0)$; 要使 $u(x, t)$ 满足 $u_t|_{t=x} = \psi(x)$, 当且仅当 $\psi(x) = 3x^2 - F'(0)$, 从而得证. 当 $a = \pm 1$ 时, 直线 $t = ax$ 为特征线; 当 $a \neq 1$ 时, 直线 $t = ax$ 不是特征线. 因此给定初值时, 关于解的存在惟一性的结论不相同.

12. 对方程和初条件两边关于 (x, y, z) 作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + a^2 |\lambda|^2 \hat{u} = 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \Phi(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda), \\ \hat{u}_t(\lambda, 0) = \Psi(\lambda) = \hat{\psi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, t)$ 是解 $u(x, y, z, t)$ 关于 (x, y, z) 的

Fourier 变换. 解这个常微分方程的初值问题得

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \Phi(\lambda) \cos(a|\lambda|t) + \Psi(\lambda) \frac{\sin(a|\lambda|t)}{a|\lambda|}, \quad t > 0.$$

然后对两边求 Fourier 逆变换, 即得.

13. 对方程和初条件两边关于 (x, y) 作 Fourier 变换, 得到

$$\begin{cases} \frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} + a^2 |\lambda|^2 \widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}(\lambda, 0) = \Phi(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda), \\ \widehat{u}_t(\lambda, 0) = \Psi(\lambda) = \widehat{\psi}(\lambda), \end{cases}$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\widehat{u} = \widehat{u}(\lambda, t)$ 是解 $u(x, y, t)$ 关于 (x, y) 的 Fourier 变换. 解这个常微分方程的初值问题得

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \Phi(\lambda) \cos(a|\lambda|t) + \Psi(\lambda) \frac{\sin(a|\lambda|t)}{a|\lambda|}, \quad t > 0.$$

然后对两边求 Fourier 逆变换, 即得.

14. 易证

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \frac{1}{2} (f(x-at) + f(x+at) + g(y-at) + g(y+at)) \\ & + \frac{1}{2a} \left(\int_{y-at}^{y+at} \varphi(\xi) d\xi + \int_{z-at}^{z+at} \psi(\eta) d\eta \right) \end{aligned}$$

是一个解. 由解的惟一性知, 初值问题解的表达式必为上式.

15. 直接验证即可.

16. 由于 $u(x, t) = u(r, t)$ ($r = |x|$), 则

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = u_t t - a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) = 0.$$

令 $v(r, t) = ru(r, t)$, 则 $v_{tt} - a^2 v_{rr} = 0$. 利用 D'Alembert 公式即证.

17. 直接代入公式即可.

18. 作变换 $v(x, t) = u(x, t) - g(t)$, 则 v 满足半无界问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = -g''(t), & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ v(x, 0) = \varphi(x) - g(0), \quad v_t(x, 0) = \psi(x) - g'(0), & x \geq 0, \\ v(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

利用奇延拓得到一个 Cauchy 初值问题, 然后求解.

19. 设函数 $\varphi(x) \in C^3[0, +\infty)$, $\psi(x) \in C^2[0, +\infty)$, $g(t) \in C^2[0, +\infty)$ 满足相容性条件

$$g(0) = \varphi'(0), \quad g'(0) = \psi'(0), \quad g''(0) - a^2 \varphi'''(0) = f_x(0, 0).$$

20. 考虑 $v(x, t) = u(x, t) - u(-x, t)$ 满足的方程, 再利用上一题的结论.

21. 作变换 $v(x, t) = u(x, t) - Ax \sin \omega t$, 则 v 满足半无界问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = (A\omega^2 \sin \omega t)x, & (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = -A\omega x, & x \geq 0, \\ v_x(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

利用偶延拓得到一个 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = (A\omega^2 \sin \omega t)|x|, & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = -A\omega|x|, & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

然后求解.

22. 区域为以正方形 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 为底, $(0, 0, 1)$ 为顶点的锥.

23. 区域为 $\{(x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ | t \geq 0, x \geq 0, t+x \leq 1\}$.

24. 利用等式 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right)$ 将方程化为两个一阶的方程.

25. 由于 $u(x, t) = F(x-t) + G(x+t)$, 代入初值条件, 则

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x-t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi(0).$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $(-a, 0]$ 上给定, $\psi(x)$ 在 $[0, b]$ 上给定, 则此定解条件的决定区域为

$$R = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ | -2a \leq x-t \leq 0, 0 \leq x+t \leq 2b\}.$$

26. 由于 $u(x, t) = F(x-t) + G(x+t)$, 代入初值条件, 则

$$u(x, t) = \varphi(t-x) + \psi\left(\frac{t+x}{2}\right) - \psi\left(\frac{t-x}{2}\right).$$

由于 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[0, a]$ 上给定, 则此定解条件的决定区域为

$$R = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ | 0 \leq t - x \leq a, 0 \leq t + x \leq 2a\}.$$

27. 由于 $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$, 代入初值条件, 则

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{t+x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t-x}{2}\right) - \varphi(0) - \int_0^{t-x} \psi(\eta) d\eta.$$

由于 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[0, a]$ 上给定, 则此定解条件的决定区域为

$$R = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ | 0 \leq t - x \leq a, 0 \leq t + x \leq 2a\}.$$

28. 由于 $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$, 代入初值条件, 则

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{x-t} \int_0^{t-x} e^\eta \left(\psi(\eta) - 2\varphi\left(\frac{\eta}{2}\right) \right) d\eta \\ &\quad + \varphi\left(\frac{t-x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t+x}{2}\right) - e^{x-t} \varphi(0). \end{aligned}$$

由于 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[0, a]$ 上给定, 则此定解条件的决定区域为

$$R = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ | 0 \leq t - x \leq a, 0 \leq t + x \leq a\}.$$

29. $u_t + au_x = 0$ 的初边值问题提法正确. 当 $g(t), \varphi(x)$ 满足相容性条件 $g(0) = \varphi(0)$ 和 $g'(0) + a\varphi'(0) = 0$ 时, 所得的解

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - at), & x \geq at, \\ g\left(t - \frac{x}{a}\right), & 0 \leq x \leq at \end{cases}$$

是 C^1 解

30. 考虑二维初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - a^2(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}) = \tilde{f}(x, y, t), & (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^3, \\ \tilde{u}(x, y, 0) = \tilde{\varphi}(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \\ \tilde{u}_t(x, y, 0) = \tilde{\psi}(x, y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \end{cases}$$

其中解 $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t) = u(x, t)v(y)$, 右端项 $\tilde{f}(x, y, t) = f(x, t)v(y)$, 初值解 $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)v(y), \tilde{\psi}(x, y) = \psi(x)v(y)$, 辅助函数 $v(y)$ 满足方程 $v''(y) = -bv(y)/a^2$. 解的惟一性证明可简化为证明当 $f(x, t) \equiv 0, \varphi(x) =$

$\psi(x) \equiv 0$ 时, 初值问题只有零解. 为此推导能量不等式.

31. 先作函数变换 $v(x, t) = e^{\frac{1}{2}(bt - \frac{c}{a^2}x)} u(x, t)$ 将此问题化为上一问题, 然后求解. 解的惟一性证明可简化为证明当 $f(x, t) \equiv 0, \varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ 时, 初值问题只有零解. 为此推导能量不等式.

32. 解的惟一性证明可简化为证明当 $f(x, t) \equiv 0, \varphi(x) = \psi(x) \equiv 0, g(t) \equiv 0$ 时, 半无界问题只有零解. 为此, 对于任意 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ 在区域 $\Omega_\tau = \{(x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ | 0 \leq t \leq \tau, 0 \leq x \leq x_0 - a(t_0 - t)\}$ 上推导能量不等式.

33. 解的惟一性证明可简化为证明当 $f(x, t) \equiv 0, \varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ 时, 初值问题只有零解. 为此推导能量不等式, 注意利用 Gronwall 不等式.

34. 与一维波动方程带有第一边值问题的混合问题解的惟一性证明相似.

35. 在附注 4.8 的区域上推导能量不等式.

36. 与一维波动方程的能量不等式相似.

37. (1) 在区域 $\Omega_t = \{(x, \tau) \in \mathbf{R}_+^2 | 0 \leq \tau \leq t, x_1 - at + a\tau \leq x \leq x_2 + at - a\tau\}$ 上推导能量不等式.

(2) 在 (1) 的不等式中, 再令 $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow +\infty$.

(3) 在区域 $\Omega_t = \{(x, \tau) \in \mathbf{R}_+^2 | 0 \leq \tau \leq t, x_1 - a\tau \leq x \leq x_2 + a\tau\}$ 上推导另一方向的能量不等式, 再令 $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow +\infty$.

38. 利用 D'Alembert 公式和附注 4.2 的表达式, 则

$$u_t(x, t) = aF'(x + at) - aG'(x - at),$$

$$u_x(x, t) = F'(x + at) + G'(x - at),$$

其中 $F' = \frac{1}{2a}(a\varphi' + \psi), G' = \frac{1}{2a}(a\varphi' - \psi)$.

39. 利用 Kirchhoff 公式 (4.33), 注意到 $\varphi(x), \phi(x)$ 是具有紧支集的光滑函数.

40. (1) $u(x, t) = \cos at \sin x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^4 \pi} \sin((2k+1)at) \sin((2k+1)x).$

$$(2) u(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4l^2}{[(n+1/2)\pi]^3} \cos \frac{(n+1/2)a\pi t}{l} \sin \frac{(n+1/2)\pi x}{l}.$$

$$(3) u(x, t) = \cos \frac{\pi at}{l} \cos \frac{\pi x}{l}.$$

$$(4) u(x, t) = 1 + t.$$

(5) 作变换 $v(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{2\pi}[A_1(x - \pi)^2 t - A_2 x^2 t]$ 将边值齐次化, 然后求解.

$$41. (1) u(x, t) = \frac{l^2}{\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{\pi a t}{l}\right) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

(2) 先求出特征值 $\lambda_n = n^2$, 特征函数 $X_n(x) = \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$),

然后令 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, 代入方程和初边值条件得到 $T_n(t)$ 满足

$$\begin{cases} T_n''(t) + 2T_n'(t) + n^2 T_n(t) = \frac{4}{n^3 \pi} (1 - (-1)^n), & t > 0, \\ T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0. \end{cases}$$

求解上述常微分初值问题.

(3) 作变换 $v(x, t) = u(x, t) - \frac{Ax^2}{l^2}$, 将边值齐次化得到

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = \frac{2a^2 A}{l^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

然后求解.

(4) 记 $\omega_n = \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right)$, $X_n(x) = \cos \omega_n x$, 则

$$u(x, t) = 1 + A(x - l) \sin \omega t + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

其中当 $\omega \neq a\omega_n$ 时,

$$T_n(t) = \frac{4A\omega}{a l^2 \omega_n^3} \left[\sin(a\omega_n t) - \frac{\omega}{\omega^2 - a^2 \omega_n^2} (\omega \sin(a\omega_n t) - a\omega_n \sin \omega t) \right];$$

当 $\omega = a\omega_n$ 时, $T_n(t) = \frac{2A}{a l^2 \omega_n^2} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$.

(5) 作变换 $v(x, t) = u(x, t) + \frac{A_1 t}{2l} (x - l)^2$ 将边值齐次化, 然后求解.

42. 函数 $v(x, t) = xu(x, t)$ 满足 $v_{tt} - v_{xx} = 0$.

43. 首先将时间变量 t 和空间变量 x, y 分离, 将函数 $u(x, y, t) = T(t)U(x, y)$ 代入方程和边条件得到

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0$$

和

$$\begin{cases} U_{xx} + U_{yy} + \lambda U = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ U|_{x=0} = U|_{x=1} = 0, & 0 \leq y \leq 1, \\ U_y|_{y=0} = U_y|_{y=1} = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

对于第二个边值问题继续利用分离变量法求解. 令 $U(x, y) = X(x)Y(y)$, 代入方程和边条件得到

$$\begin{cases} X''(x) + \alpha X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X|_{x=0} = X|_{x=1} = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y''(y) + \beta Y(y) = 0, & 0 < y < 1, \\ Y_y|_{y=0} = Y_y|_{y=1} = 0, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

其中 $\alpha + \beta = \lambda$. 然后求出上述问题的特征值和特征函数, 再求出相对应的函数 $T(t)$. 最后根据初条件决定相应的系数. 可参见文献 [12] 第一章中的 4.7 小节.

44. 令 $v(x, t) = u(x, t) + \lambda_1(x)g_1(t) + \lambda_2(x)g_2(t)$.

$$(1) v(x, t) = u(x, t) - \left[\frac{(x-l)^2}{2l + \alpha l^2} g_1(t) + \frac{x^2}{2l + \beta l^2} g_2(t) \right].$$

$$(2) v(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{2l} [(x-l)^2 g_1(t) + x^2 g_2(t)].$$

45. 方程两端同乘以 u_t , 然后在 Q_t 上积分, 注意利用边值条件.

46. 与上一题类似.

47. 与上一题类似.

48. 需要提两类条件: 第一类为光滑性条件, 例如, $\varphi(x) \in C^3[0, l]$, $\psi(x) \in C^2[0, l]$, $f(x, t) \in C^1([0, l] \times [0, \infty))$; 第二类为相容性条件, 如在角点 $(0, 0)$, $(l, 0)$ 需提如下相容性条件:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

$$a^2 \varphi''(0) + f(0, 0) = 0, \quad a^2 \varphi''(l) + f(l, 0) = 0.$$

49. 方程两端乘以一个试验函数, 然后分部积分, 利用初边值条件来降低解的光滑性要求, 这样就得到广义解的定义. 为使问题是适定的, 仍需要提两类条件: 第一类为正则性条件; 第二类为相容性条件.
50. (1) 选取适当的试验函数.
 (2) 如果 $u(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, 则 (4.60) 中的第一项可以分部积分. 然后选取适当的试验函数.

名 词 索 引

这里按汉语拼音顺序给出常用名词 (凡以外文字母开始的词组均将第一个字母看做汉语拼音归入相应的类), 并给出其所在的页码.

A		Cauchy-Riemann 方程	22
Abel 判别法	115	初边值条件	11, 184
B		初始条件	82, 111, 148, 151, 153, 181
半线性偏微分方程	4	初值问题	80, 83, 95, 98, 112, 124, 146, 149, 162, 172, 186
半无界问题	146, 157, 178, 182	存在性	12, 17, 80, 116, 146, 172, 200
Bessel 不等式	183, 201	D	
比较原理	120	D'Alembert 公式	146, 156, 186
变分问题	18	第二边值条件	21
标准型	10	第二边值问题	21, 43, 64, 121
边值条件	11, 116, 121, 130, 148, 180	第三边值条件	21
波动方程	6, 9, 12, 146	第三边值问题	21, 64, 68, 121
Boltzmann 方程	7	第一边值条件	21
不适定性	134	第一边值问题	21, 66, 120
Burgers 方程	6	Dirac 测度	39, 97
C		Dirichlet 边值条件	21
Cauchy 不等式	66	Dirichlet 问题	17, 21, 29, 46, 50, 55, 62, 66
Cauchy 初值问题	80, 149, 157, 161, 178	电报方程	6
Cauchy 主值	85, 93	定解条件	11, 82
		定解问题	11, 82, 134, 151

Duhamel 原理	153	G	
对称开拓法	159,186	概率	20
多孔介质方程	7	Gauss 公式	14
E		共振	187
Euler 方程组	8	Green 函数	17,37,44,80,101,113
Euler-Lagrange 方程	19	Green 公式	13,174
F		Gauss-Green 公式	15,19,30,39,43, 66,68,81,147, 163,191
反演公式	86,93	Gronwall 不等式	80,129,178,193
反向问题	134	古典解	4,12,157,160,187,196
反应扩散方程	81	广义函数	38,97,114
反应扩散方程组	8	广义解	4,146,172,195
非线性波动方程	7	H	
非线性偏微分方程	6	Hamilton-Jacobi 方程	6
非线性偏微分方程组	8	Harnack 不等式	17,27,32
非线性 Poisson 方程	6	Hessian 矩阵	2,57
分离变量	80,95,110,112,179,187	Heaviside 函数	113
Fick 扩散定律	20	Hopf 引理	59,61
Fokker-Planck 方程	5	混合问题	80,101,109,121,128,131, 146,179,194
Fourier 变换	80,83,85,88,93,96, 101	Huygens 原理	171
Fourier 级数	80,83,115,183,187	J	
Fourier 积分	80,83,85	基本解	17,37,80,95
Fourier 逆变换	85,93,96	极小曲面方程	6,18
Fourier 热传导定律	20,91,100	极值原理	17,57,62,117,127
Fourier 系数	109,115,200	降维法	146,166
Friendrichs 不等式	67		
Fubini 定理	91		

阶	2	O	
解析函数	22,33,134	欧氏空间	1
卷积	90,95	Ohm 传导定律	20
决定区域	169	P	
K		抛物边界	118,122
Kirchhoff 公式	146,165,170	抛物型方程	10
Kolmogorov 方程	5	p -Laplace 方程	7
Korteweg-deVries (KdV) 方程	7	偏导数	1
Kronecker 符号	11	平均值公式	17,23,25
扩散项	81	Poisson 方程	17
L		Poisson 公式	17,49,55,80,97,99, 101,124,167,170
Laplace 方程	17,34,62	Poisson 核	49,55
Laplace 算子	2,40	Q	
Liouville 定理	17,32	强极值原理	28,61
M		球面平均法	146,162
Maxwell 方程组	8	R	
Monge-Ampère 方程	6	热方程	5,8,10,12,21,80,190
弥漫	171	Riemann-Lebesgue 引理	86
N		弱极值原理	29
Navier-Stokes 方程组	8	S	
Neumann 边值条件	21	散度	2
Neumann 边值问题	21,44,63		
拟线性偏微分方程	5		
能量模估计	17,66,80,129,131,177, 194,198		
能量不等式	146,172,187,190,199		
Newton-Leibniz 公式	88		

Schrödinger 方程	5	位势方程	8,10,12,17,80,119,190
适定性	12,135,146	无限传播速度	100
双曲型方程	10		
守恒律方程	6		
守恒律方程组	8		
Sturm-Liouville 方程	102,108		
T			
Taylor 展开式	20		
Taylor 级数	33		
梯度	2,17,19		
调和函数	17,22		
调和多项式	22		
特征值	10,102,106,181		
特征值方程	5		
特征函数	43,102,181,200		
特征值问题	43,80,102,111,181		
特征线	146,154,160,195		
特征锥	146,168,172		
椭圆方程	10		
W			
完全非线性偏微分方程	5		
惟一性	12,17,80,121,128,132,146		
	172,178,187,198		
稳定性	12,17,80,121,146,172		

X

线性偏微分方程	4
线性偏微分方程组	7
线性弹性发展方程组	7
线性弹性平衡方程组	7
先验估计	12,146
相容性条件	116,160,182,186,197,199
形式解	12,112,117,183

Y

依赖区域	168,170
影响区域	169
输运方程	6
右行波	156

Z

增长性条件	126
支集	3
驻波法	187
最大模估计	17,57,62,117,120,124
左行波	156

符号索引

这里给出若干常用的数学符号, 并按照先后次序给出了本书的通用符号、相应含义, 以及所在的页码, 以方便查询. 书中有特殊说明除外.

第一章

$\mathbf{R}^n$	$\mathbf{R}$ 中的一个集合, 特指 $\mathbf{R}^n$ 上的有界开集	1
Ω	n 维欧氏空间	1
$\mathbf{R}$	一维欧氏空间、实数轴	1
$D^k u$	u 的所有 k 阶偏导数, 可看成 $\mathbf{R}^{n^k}$ 上的向量	1
$ D^k u $	$D^k u$ 的长度	1
Du	u 的梯度	2
$D^2 u$	u 的 Hessian 矩阵	2
Δ	Laplace 算子	2
tr	矩阵的迹	2
div	散度	2
u_{x_i}	u 关于 x_i 的一阶偏导数	2
$u_{x_i x_j}$	u 关于 x_i, x_j 的二阶偏导数	2
$C(\Omega)$	Ω 上的所有连续函数构成的线性空间	3
$\ u\ _{C(\Omega)}$	u 在 $C(\Omega)$ 中的模	3
sup	上确界	3
$C^k(\Omega)$	Ω 上的 k 次连续可微函数构成的线性空间	3
$\ u\ _{C^k(\Omega)}$	u 在 $C^k(\Omega)$ 上的模	3
α	多重指标	3
$ \alpha $	α 的阶数	3
$D^\alpha u$	u 的一个 $ \alpha $ 阶的偏导数	3
spt u	u 的支集	3
$C_0^k(\Omega)$	$C^k(\Omega)$ 中具有紧支集的函数构成的子空间	4
$C^\infty(\Omega)$	Ω 上任意阶偏导数存在和连续的函数类	4
$\bar{\Omega}$	Ω 的闭包	12
$\partial\Omega$	Ω 的边界	12
$\mathbf{R}_+^n$	$\mathbf{R}^n$ 的上半空间	13
$\partial\mathbf{R}_+^n$	$\mathbf{R}_+^n$ 的边界	13

$\mathbf{R}_+$	正实轴	13
$\mathbf{R}_+^{n+1}$	$\mathbf{R}^{n+1}$ 的上半空间	13
$\alpha(n)$	n 维单位球的体积	13
$\Gamma(s)$	Γ 函数	13
$B(x, r)$	以 x 为心, r 为半径的 n 维开球	13
$\partial B(x, r)$	$B(x, r)$ 的边界	13
$S^{n-1}(x, r)$	以 x 为心, r 为半径的 $n-1$ 维球面	13
$\omega(n)$	$n-1$ 维单位球面的面积	13
$\mathbf{R}^2$	平面	13
$\mathbf{n}$	区域边界的单位外法向量	13
$\mathbf{R}^3$	三维的欧氏空间	14

第二章

χ_D	D 上的特征函数	20
$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$	u 在边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数	21
$\mathbf{C}$	复平面	2
$\Im f(x+iy)$	$f(x+iy)$ 的虚部	22
$\Re f(x+iy)$	$f(x+iy)$ 的实部	22
$\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$	u 在球面 $\partial B(x, r)$ 上的平均值	23
$\int_{B(x,r)} u(y) dy$	u 在球 $B(x, r)$ 上的平均值	23
Ω_ε	Ω 中离边界 $\partial\Omega$ 的距离大于 ε 的点集	26
$\inf$	下确界	27
dist	距离	27
B_R	半径为 R 的球	28
$\max_{\bar{\Omega}} u$	u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值	28
$\max_{\partial\Omega} u$	u 在 $\partial\Omega$ 上的最大值	28
$\Gamma(x)$	Laplace 方程的基本解	38
$\delta(x)$	Dirac 测度	39
$G(x, y)$	Ω 上的 Green 函数	45
$K(x, y)$	Poisson 核	49, 55
$\mathcal{L}u$	$\mathcal{L}u = -\Delta u + C(x)u$	57, 149
u^+	u 和 0 的最大值	58
$\frac{\partial u}{\partial \nu}$	u 关于方向 ν 的方向导数	59

第三章

$C^{2,1}(Q)$	Q 上关于 x 二阶偏导数连续, 关于 t 一阶偏导数连续的函数集	83
$C^{1,0}(Q)$	Q 上连续且关于 x 一阶偏导数连续的函数集	83
$\hat{f}(\lambda)$	f 的 Fourier 变换	85, 93
$(\hat{f}(\lambda))^\vee$	f 的 Fourier 逆变换	86, 93
$L^1(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上的可积函数空间	85
$f * g$	f 和 g 的卷积	90, 95
$L^q(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上的可积函数空间	93
$K(x, t)$	Poisson 核	96, 101
$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$	热方程的基本解	97
$\delta(x - \xi, t - \tau)$	Dirac 测度	97
$L^\infty(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ 上有界可测函数	98
$L^\infty(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上有界可测函数	101
$L^2((0, l))$	$(0, l)$ 上平方可积函数空间	102
$G(x, t; \xi, \tau)$	Green 函数	113
$H(t)$	Heaviside 函数	113
Q_T	$Q_T = (0, l) \times (0, T]$	113
$\partial_p Q_T$	Q_T 的抛物边界	118
$\mathcal{L}u$	$\mathcal{L}u = u_t - a^2 u_{xx}$	118

第四章

$\mathcal{L}u$	$\mathcal{L}u = u_{tt} - a^2 \Delta u$	149
$C(x_0, t_0)$	以 (x_0, t_0) 为顶点的特征锥	168
$D_{(x_0, t_0)}$	点 (x_0, t_0) 对初值的依赖区域	168
J_{x_0}	点 x_0 的影响区域	168
J_{D_0}	区域 D_0 的影响区域	169
F_{D_0}	区域 D_0 的决定区域	169
$\partial D_{(x_0, t_0)}$	$D_{(x_0, t_0)}$ 的边界	170
$d_{\min}$	最近距离	170
$d_{\max}$	最远距离	170
C_τ	$C_\tau = C(x_0, t_0) \cap \{t = \tau\}$	172
$C(\tau)$	$C(\tau) = C(x_0, t_0) \cap \{0 \leq t \leq \tau\}$	173
Ω_τ	$\Omega_\tau = \Omega \times (0, \tau)$	190
$\mathcal{D}$	试验函数类	197

参 考 文 献

- [1] Axler S, Bourdon P and Ramey W. *Harmonic Function Theory*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 137. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [2] DiBenedetto E. *Partial Differential Equations*. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1995.
- [3] Evans L C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, AMS Providence, Rhode Island, 1998.
- [4] Gilbarg D and Trudinger N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Second Edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 224. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1983.
- [5] Han Q and Lin F. *Elliptic Partial Differential Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University, 1997.
- [6] John F. *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Applied Mathematical Sciences 1. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [7] Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 258. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1983.
- [8] 姜礼尚, 陈亚浙. 数学物理方程 (第一版). 北京: 高等教育出版社, 1986.
- [9] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣, 易法槐. 数学物理方程 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 1996.
- [10] 柯朗, 希尔伯特著; 钱敏, 郭敦仁译. 数学物理方法 (I). 北京: 科学出版社, 1958.
- [11] 柯朗, 希尔伯特著; 熊振翔, 杨应辰译. 数学物理方法 (II). 北京: 科学出版社, 1981.
- [12] 刘西垣. 数学物理方程. 武汉: 武汉大学出版社, 1994.