日期:　　/

第六章 线性微分方程组

§ 一般理论

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + f_i(x) \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x) \quad (6.1)$$ $A(x)$、$f(x)$ 在 $a<x<b$ 连续

1、$f(x,y)$ 在 $(a,b)\times(-\infty,\infty)$ 连续，关于 y 局部Lip，$|f(x,y)| \leq |A(x)||y| + |f(x)|$

$\Rightarrow$ 存在唯一解，最大区间为 (a,b)

2、先考察齐次方程 $\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad (6.2)$

Lemma 1. 若 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 为解，$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$，$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 为解

（即 S 为 (6.2) 所有解构成的集合，则 S 为线性空间）

Lemma 2. S 为 n 维线性空间，n 为方程组阶数

pr. 固定 $x_0 \in (a,b)$ df. $H: \mathbb{R}^n \to S$

$y_0 \mapsto y(x)$　　$y(x)$ 为 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的解

step 1. 单射

$y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$，st. $H(y_0) = H(z_0)$，则 $y(x) = H(y_0) = H(z_0) = z(x)$

故 $y(x) - z(x)$ 仍为解 $\equiv 0 \Rightarrow y(x_0) = z(x_0)$　即 $y_0 = z_0$

step 2. 满射

$y(x) \in S$，则在 $a<x<b$ 上存在且唯一，令 $y_0 = y(x_0)$，即找到 $\mathbb{R}^n$ 中 y_0 st. $H(y_0) = y(x)$

step 3. H 线性 （即 $H(C_1y_0 + C_2z_0) = C_1H(y_0) + C_2H(z_0)$）

日期:　　/

$\forall y_0, z_0 \in R^n$, $H(y_0), H(z_0) \in S$, 则 $c_1 H(y_0) + c_2 H(z_0) \in S$

其初值为 $c_1 y_0 + c_2 z_0$, 而对应解为 $H(c_1 y_0 + c_2 z_0)$

由解唯一性知 $H(c_1 y_0 + c_2 z_0) = c_1 H(y_0) + c_2 H(z_0)$

故 H 为线性空间同构，故 S 为 n 维

def 1. 向量值函数 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 在 (a,b) 线性相关

若 $\exists$ 不全为零的 $c_1 \cdots c_n$, s.t. $c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

否则称它们线性无关

thm 1 (6.2) 在 (a,b) 上有 n 个线性无关的解向量

pr. 令 $\phi_1(x) = H(e_1), \cdots, \phi_n(x) = H(e_n)$

验证 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 线性无关

若 $\exists c_1 \cdots c_n$, st. $c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

取 $x = x_0$, 则 $c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$

Q、如何判断 n 个解向量 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 线性无关？

令 $y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} \cdots y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$

令 $W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$ Wronski 行列式

Lemma 3. Wronski 行列式满足 Liouvile 方程：

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} trA(s)\,ds}$$

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y \quad 即 \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_{1i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}$$

故 $\frac{d}{dx}y_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_{kj}$

即 $$\frac{dW}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \sum_{k_1=1}^{n}a_{ik_1}y_{k_11} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n}a_{ik_n}y_{k_nn} \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=tr(A)W(x)$$

W为一阶齐次方程的解，故 $W(x)$ 恒为0 / 恒不为0

thm 2. (6.2) 解组 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 线性无关充要条件为 $W(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$

pr. $W(x)\neq 0 \iff W(x_0)\neq 0$ (Lemma 3)

$\iff y_1(x_0)\dots y_n(x_0)$ 线性无关

$\iff H(y_1(x_0))\dots H(y_n(x_0))$ 线性无关

$\iff y_1(x)\dots y_n(x)$ 线性无关

cor 1 n个解向量线性相关 $\iff W(x)\equiv 0$, $\forall\, a<x<b$

def 2. $\frac{dy}{dx}=A(x)y$ $\quad y_i=\begin{pmatrix} y_{1i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}$

若 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 为一个解组，则令 $Y(x)=(y_{ij})_{n\times n}$

称为解矩阵

$$\frac{dY}{dx}=\left(\frac{dy_{ij}}{dx}\right)_{n\times n}=\left(\sum_k a_{ik}y_{kj}\right)=A(x)Y$$ 故解矩阵为方程的解

def 3 $y_1\dots y_n$ 线性无关，则称为基本解组，称解矩阵为基本解矩阵

thm 3 (6.2) 的一个基解矩阵为 $\Phi(x)$，则 (6.2) 通解为 $\Phi(x)C$，$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ $c_i\in\mathbb{R}$

cor 2 设 $\Phi(x)$ 为一个基解矩阵，$\forall C$ 非奇异，$\Psi(x)=\Phi(x)C$ 亦为基解矩阵

若 $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ 均为基解矩阵，则 $\exists C$ 非奇异，st $\Psi(x)=\Phi(x)C$

日期: /

pr. 1. $\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d(\Phi C)}{dx} = \frac{d\Phi}{dx} C = A(x)\Phi C = A(x)\Psi$.

故 Ψ 为解矩阵

$|\Psi(x)| = |\Phi(x)||C| \neq 0 \Rightarrow \Psi$ 为基解.

2. 当 $x = x_0$ 时, $\Phi(x_0)$, $\Psi(x_0)$ 非奇异

$\exists$ 非奇异阵 s.t. $\Psi(x_0) = \Phi(x_0) C$

令 $\xi(x) = \Psi(x) - \Phi(x) C$

$\frac{d\xi}{dx} = d\Psi - d(\Phi C) = A(x)\Psi - A(x)\Phi C = A(x)\xi$.

故 ξ 满足方程而 $\xi(x_0) = 0$

$\Rightarrow \xi(x) = \Psi(x) - \Phi(x) C \equiv 0$

再考虑非齐次方程组

Lemma 4. $\Phi(x)$ 基解, $\varphi^*(x)$ 为特解,

$y = \varphi(x)$ 可表示为 $\varphi(x) = \Phi(x) C + \varphi^*(x)$ C 为常数列向量.

求特解, 用常数变易法

$\varphi^*(x) = \Phi(x) C(x)$

$\underbrace{\Phi'(x) C(x)}_{A\Phi(x)C(x)} + \Phi(x) c'(x) = A(x)\Phi(x)C(x) + f(x)$

$\Rightarrow \Phi(x) c'(x) = f(x)$ $|\Phi(x)| \neq 0$

$c'(x) = \Phi^{-1}(x) f(x) \Rightarrow C(x) = \int \Phi^{-1}(x) f(x)$

$\Rightarrow \varphi^*(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds$

thm 4. 给出非齐次的通解

$$y = \Phi(x)\left(C + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds\right)$$

$y(x_0) = y_0$ 的解为 $y = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0) y_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds$.

日期:　　/

§ 常系数线性微分方程组

$\frac{dy}{dx}=Ay$，A为n阶常数矩阵　　(6.3)

令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，定义 $\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$

验证，$\|A\|\geq 0$，$\|A\|=0 \iff A=0$

$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

$\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$

性质：$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

pr. $\|AB\|=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\max_{1\leq k\leq n}|b_{kj}|\right)\right]$

$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k'=1}^{n}|b_{k'j}|\right)=\|A\|\|B\|$

thm 1. 矩阵A的幂级数 $E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots$ 绝对收敛

def 1　$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$

thm 2. 矩阵指数函数性质：

(1) $AB=BA$，则 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B$

(2) $\forall A$，指数函数 e^A 可逆，$(e^A)^{-1}=e^{-A}$

(3) 若 P 非奇异，则 $e^{PAP^{-1}}=Pe^AP^{-1}$

thm 3. $\Phi(x)=e^{xA}$ 为 (6.3) 标准基解矩阵

pr. $\frac{d}{dx}e^{xA}=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}A^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k=\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{x^{k'}}{k'!}A^{k'+1}=Ae^{xA}$

$x=0$ 时，$e^{xA}=E$　$\det E\neq 0$

cor 1. $\frac{dy}{dx}=Ay+f(x)$ 在 (a,b) 上通解为 $y=e^{xA}C+e^{xA}\int_{x_0}^{x}(e^{sA})^{-1}f(s)ds$

$=e^{xA}C+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}f(s)ds$

满足初值 $y(x_0)=y_0$ 解为 $y=e^{(x-x_0)A}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)A}f(s)ds$

日期: /

ex 1. $A=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

$$e^{xA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}a_n^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{a_1x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_nx} \end{pmatrix}$$

ex 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=E+Z$

$$e^{xA}=e^{x(E+Z)}=e^{xE}\cdot e^{xZ}=e^{x}E\cdot\left(E+\frac{1}{1!}xZ\right)=\begin{pmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ & e^{x} \end{pmatrix}$$

Q. 算法较为困难，有无好的算法？

Lemma 1 (Jordan型) $\exists P\in GL_n$, s.t. $P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$ J_i 为 n_i 阶 Jordan 型 $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ $n_1+\cdots+n_s=n$

$$e^{xJ}=\begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{xJ_s} \end{pmatrix}\quad Z\triangleq\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{xJ_i}=e^{x(\lambda_iE+Z)}=e^{\lambda_ix}\,e^{xZ}$$

$$e^{xZ}=E+\begin{pmatrix} 0 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ & & & 0 \end{pmatrix}+\frac{x^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$e^{xA}=e^{xPJP^{-1}}=Pe^{xJ}P^{-1}$ 而基解矩阵 × 非奇异阵得到基解矩阵

则 Pe^{xJ} 为基解阵 (只能做到这块)

Lemma 2 (待定指数函数法)

(一) A 有单特征值，即有 n 个互不相同特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$

此时 $J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Phi(x)=P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_nx} \end{pmatrix}$$

设 $P=(r_1,\cdots,r_n)$ r_i 为 n 维列向量，$\Phi(x)=(e^{\lambda_1x}r_1,\cdots,e^{\lambda_nx}r_n)$

日期:　　/

故 $\frac{d}{dx}(e^{\lambda_i x}r_i) = A(e^{\lambda_i x}r_i)$

$\lambda_i e^{\lambda_i x} r_i = e^{\lambda_i x} A r_i \Rightarrow \lambda_i r_i = A r_i$

$\Rightarrow (A-\lambda_i E) r_i = 0$　　r_i 为 λ_i 对应特征向量

Rm. λ 为 A 的复特征值，r 为特征向量，即 $Ar = \lambda r$

$A\bar{r} = \bar{\lambda}\bar{r}$　则 $\bar{\lambda}$ 共轭为 A 特征值，特征向量为 $\bar{r}$

$y \triangleq e^{\lambda x} r$，$\bar{y} \triangleq e^{\bar{\lambda} x}\bar{r}$，设 $y = u(x) + iv(x)$，$\bar{y} = \bar{u}(x) - iv(x)$

$\Rightarrow u = \frac{1}{2}(y-\bar{y})$，$v = \frac{1}{2i}(y-\bar{y})$ 为解（表明2个复解可被替换为2个实解）

ex 3. $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} y$

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -28 & -18 \\ -1 & 5-\lambda & 3 \\ 3 & -16 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda(1-\lambda^2)$　　$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -1$

$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

基解矩阵为 $\Phi(x) = \begin{pmatrix} -2 & 2e^x & 3e^{-x} \\ -1 & -e^x & 0 \\ 1 & 2e^x & e^{-x} \end{pmatrix}$，通解为 $y = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2e^x \\ -e^x \\ 2e^x \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}$

ex 4　$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$

$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$　　$\lambda_1 = 1+i$　$\lambda_2 = 1-i$

$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$　$r_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

基解矩阵为 $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x(\cos x + i\sin x) & e^x(\cos x - i\sin x) \\ e^x(-\sin x + i\cos x) & e^x(-\sin x - i\cos x) \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ -e^x\sin x & e^x\cos x \end{pmatrix}$

(二) A 有相重特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，重数为 $n_1, \cdots, n_s$

日期: /

$$\tilde{P}e^{xJ_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{记}\,n_i\,\text{为}\,n}{\begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ & & & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}x+a_{12} & \cdots & a_{11}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}x+a_{22} & \cdots & a_{21}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+a_{2n} \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ 为最后一个列向量的表达

设解向量为 $y=\left(r_0+r_1x+\cdots+r_{n_i-1}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\right)e^{\lambda_i x}$ (与 λ_i 对应)

$r_0, r_1, \cdots r_{n_i-1}$ 为常数列向量

代入方程得 $(r_1+r_2x+\cdots+r_{n_i-1}x^{n_i-2})e^{\lambda_i x}+(r_0+r_1x+\cdots+r_{n_i-1}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!})\lambda_i e^{\lambda_i x}$

$$= e^{\lambda_i x}A\left(r_0+\cdots+r_{n_i-1}\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1=(A-\lambda_i E)r_0 \\ r_2=(A-\lambda_i E)r_1=(A-\lambda_i E)^2 r_0 \\ \vdots \\ r_{n_i-1}=(A-\lambda_i E)^{n_i-1}r_0 \\ (A-\lambda_i E)r_{n_i-1}=0=(A-\lambda_i E)^{n_i}r_0 \end{cases}$$

thm 4. P184 thm 6.6

ex 5. $\frac{dy}{dx}=\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}}_{A}y$

$|A-\lambda E|=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=-2,\ n_1=1;\ \lambda_2=1,\ n_2=2$

$\lambda_1=-2$ 时, 特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 E)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 44 & 9 \end{pmatrix}$ 两个线性无关解为 $\underset{r_{10}}{\underset{\parallel\triangle}{\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}}}$ $\underset{r_{20}}{\underset{\parallel\triangle}{\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}}}$

日期: /

$$r_{11} = (A-\lambda E)r_{10} = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$r_{21} = (A-\lambda E)r_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故基解矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & (11+15x)e^{x} & 3e^{x} \\ 0 & (-7-30x)e^{x} & -6e^{x} \\ e^{-2x} & 100xe^{x} & 20e^{x} \end{pmatrix}$

日期:　　/

§高阶线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x) \quad (6.4)$$

$a_1(x),\cdots,a_n(x)\in C((a,b))$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix} \quad 则 \frac{d\mathbf{y}}{dx}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & \cdots & & -a_1(x) \end{pmatrix}\mathbf{y}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{f}(x)$$

给定初值 $\mathbf{y}(x_0)=\begin{pmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix}$

则 $a<x<b$ 上存在唯一连续解

齐次方程有形式 $\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n(x) & \cdots & & -a_1(x) \end{pmatrix}\mathbf{y} \quad (6.5)$

设 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为齐次方程的 n 个解

$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ 为 n 个解向量

def 1. 若解向量线性无关，则 $\varphi_1(x)\cdots\varphi_n(x)$ 线性无关.

def 2. Wronski 行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \vdots & & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(s)ds}=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}$$

ex 1. $\varphi(x)$ 为 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，$p(x),q(x)\in C(a,b)$.

则通解为 $y=\varphi(x)\left(C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi^2(s)}e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\right)$.

日期:　　/

$y(x)$ 为一个解，

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & y(x) \\ \varphi'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_2 e^{-\int p(t)dt}$$

$$= \varphi(x)y'(x) - \varphi'(x)y(x)$$

$$\frac{\varphi(x)y'(x) - \varphi'(x)y(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{C_2}{\varphi^2} e^{-\int p(t)dt}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\varphi} = C_1 + C_2 \int \frac{1}{\varphi^2} e^{-\int p(t)dt} ds.$$

ex 2. $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (Δ)

已知 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 两个线性无关解 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$

齐次方程通解为 $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 则 $\Delta \Leftrightarrow \frac{d}{dy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$ 为齐次的线性无关解

令 $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}$

求导 $\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

Cramer法则可写出 C_1', C_2'

$C_1' = -\frac{\varphi_2(x) f(x)}{W(x)}$　　$C_2' = \frac{\varphi_1(x) f(x)}{W(x)}$.

故 (Δ) 特解为 $y^* = -\varphi_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_2(s)f(s)}{W(s)} ds + \varphi_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(s)f(s)}{W(s)} ds$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{W(s)} f(s)\, ds$$

日期:　　　/

通解为 $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(s)}{W(s)}ds$

§常系数高阶微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x) \quad (6.6)$$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots a_ny=0 \quad (6.7)$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为常数.

(6.7)对应线性方程组为 $\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ & & &\ddots&1\\-a_n&\cdots&\cdots&\cdots&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda E)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ (特征多项式) $=0$ (特征方程) (6.8)

thm 1. 设 (6.8) 有 s 个互不相同的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 重数为 $n_1,\cdots,n_s$

则 $e^{\lambda_1x}, xe^{\lambda_1x},\cdots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1x}; \cdots;$

为 (6.7) 基本解组.

ex 1. $y'''-y''-2y'=0$

特征方程 $\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=0=\lambda(\lambda^2-\lambda-2)=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1.$

通解为 $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$

ex 2. $y^{(5)}-3y^{(4)}+4y^{(3)}-4y''+3y'-y=0$

特征方程 $\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=0$

$=(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)$

$\lambda_1=1$ (三重), $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$

通解为 $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x+C_4\cos x+C_5\sin x$

ex 3. $f(x)\in C[(a,b)]$, $\beta>0$

$y''+\beta^2y=f(x)$

日期:　　　/

齐次方程 $y''+\beta^2 y=0$

特征方程为 $\lambda^2+\beta^2=0$，$\lambda_1=\beta i$，$\lambda_2=-\beta i$

故方程的基本解组为 $\cos\beta x$、$\sin\beta x$

设方程解为 $y=C_1(x)\cos\beta x+C_2(x)\sin\beta x$

$\Rightarrow C_1'(x)\cos\beta x+C_2'(x)\sin\beta x=0$

将 y 代入非齐次方程 $C_1'(x)\sin\beta x-C_2'(x)\cos\beta x=-\frac{1}{\beta}f(x)$

$\Rightarrow C_1'(x)=-\frac{1}{\beta}f(x)\sin\beta x$

$C_2'(x)=\frac{1}{\beta}f(x)\cos\beta x$

$y^*=-\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x}f(s)\sin\beta s\,ds\cos\beta x+\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x}f(s)\cos\beta s\,ds\sin\beta x$

$=\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x}\sin\beta(x-s)f(s)\,ds$

通解为 $y=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x}\sin(\beta(x-s))f(s)\,ds$

日期:　　/

待定系数法求解非齐次高阶常性方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$$

① $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$ 　$P_m(x)$ 为 m 次多项式

μ 不为特征根，设 $\varphi^*(x)=Q_m(x)e^{\mu x}$，$Q_m(x)$ 为 m 次多项式

μ 为 k 重根，设 $\varphi^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\mu x}$

② $f(x)=(A_m(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$

$\alpha+\beta i$ 为 k 重根，设 $\varphi^*(x)=x^k(C_l(x)\cos\beta x+D_l(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$

$\uparrow$

l 次多项式 $l=\max\{m,n\}$

ex 1. $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$

$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda+1)^3=0$ 　$\lambda=-1$ 为三重特征根

设特解为 $y=x^3(ax+b)e^{-x}$

则有 $(6a+24bx)e^{-x}=(x-5)e^{-x}$

$\Rightarrow a=-\frac{5}{6},\ b=\frac{1}{24}$

故特解为 $\varphi^*(x)=\left(-\frac{5}{6}x^4+\frac{1}{24}x^3\right)e^{-x}$

通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}+\left(-\frac{5}{6}x^4+\frac{1}{24}x^3\right)e^{-x}$

ex 2. $y''+4y'+4y=\cos 2x$

日期:　　/

定性理论

§ 动力系统，相空间，轨线

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) & \text{不显含 } t \Rightarrow \text{自治系统} \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 & (8.1) \end{cases}$$

解记为 $\vec{x} = \vec{\varphi}(t; t_0, x_0)$ (8.3)

称 $\vec{x}$ 所在空间 R^n 为相空间

$(t, \vec{x})$ 所在空间 $R \times R^n$ 为增广相空间

积分曲线为增广相空间中一条曲线

(8.3) 给出了相空间中的一条曲线，称为轨线

轨线为积分曲线沿 t 方向在相空间中投影

目标：研究轨线拓扑结构

若 $\exists x_0$, s.t. $\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$，则 $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$ 为解　称为平衡点

若 (8.3) 为非定长的周期运动，$\exists T$, s.t. $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t+T, t_0, x_0)$ $\forall t$

称 (8.3) 为相空间一条闭轨

ex.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2-1) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(r^2-1) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \quad \Rightarrow \theta = t + C_1 \end{cases}$$

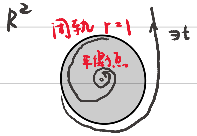
$r=0$, $r=1$ 为解，$\frac{dr}{r(r^2-1)} = dt$ 积分 $\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{r^2-1}{r^2}\right| = t + C$

$\Rightarrow \left|1 - \frac{1}{r^2}\right| = Ce^{2t}$ $(t>0)$

日期:　　/

若 $0<r<1$，$r=\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{2t}}}$　$C>0$

若 $r>1$，$r=\frac{1}{\sqrt{1-Ce^{2t}}}$　$C>0$



基本性质：$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$　(8.1)（假设解存在唯一）

1、积分曲线的平移不变性

$x=\varphi(t)$ 为 (8.1) 一个解，

$\forall C\in\mathbb{R}$，$x=\varphi(t+C)$ 为解，为经过同一个点的积分曲线

$\frac{d(\varphi(t+C))}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}(t+C)=f(\varphi(t+C))$

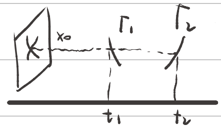
2、过相空间每一点轨线的唯一性

解存在性，经过 x_0 一定存在一条轨线

假设有2条轨线 l_1、l_2 经过 x_0，则 $\exists$ 积分曲线上一段 Γ_1, Γ_2

在相空间上投影为 l_1、l_2

将 Γ_1 平移 t_2-t_1，得到 Γ_1' 与 Γ_2 相交



由解唯一性，$\tilde{\Gamma}_1$ 与 Γ_2 在 (t_2,x_0) 附近重合

$\tilde{\Gamma}_1$ 与 Γ_1 有相同投影 $\Rightarrow$ Γ_1 与 Γ_2 在相空间 x_0 点附近有相同投影

3. 群的性质

$\varphi(t,x_0)=\varphi(t,0,x_0)$　0 时刻以 x_0 为初值的解

则 $\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0))=\varphi(t_1+t_2,x_0)$

$\varphi(t,\varphi(t_1,x_0))$ 为过 $(0,\varphi(t_1,x_0))$ 的积分曲线

$\varphi(t_1+t,x_0)$ 为积分曲线（平移不变性），过 $(0,\varphi(t_1,x_0))$

日期: /

由解唯一性，$\varphi(t_1+t, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_1, x_0))$

令 $t=t_2$ 即得

def. $\phi_t: R^n \to R^n$

$x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$ 　0处的初值 $\xrightarrow{\phi_t}$ t时刻，0时刻初值为 x_0 积分曲线的取值.

则：① $\phi_0 = Id$

② $\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1} = \phi_{t_1+t_2}$ $(\forall t_1, t_2 \in R)$

③ $\phi_t(x_0)$ 关于 t 连续 ($\Leftrightarrow$ $\varphi(t, x_0)$ 关于 t 连续)

x_0 连续 (初值的连续依赖性)

满足①~③单参数变换群 $\{\phi_t\}_{t\in R}$ 称为动力系统

该三条性质对非自治系统不成立，由于平移不变性不满足

φ 为积分曲线，则 $\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi)$，$\frac{d\varphi(t+c)}{dt} = f(t+c, \varphi(t+c)) \neq f(t, \varphi(t+c))$

即 $\varphi(t+c)$ 不为积分曲线.

日期: /

§解的稳定性

考虑 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ (8.9)

$t\in(-\infty,\infty)$, $x\in G\subset R^n$ 连续, 且 s.t. 解存在且唯一

设 $x=\phi(t)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的解

由解对初值连续依赖性,

$\forall$ 有界闭区间 I, $\forall t_0\in I$, 有 $\forall\varepsilon$, $\exists\delta$,

$|x_0-\varphi(t_0)|<\delta$, $|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t)|<\varepsilon$

Q. 能否把有界换为无界?

ex. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x\\ x(0)=x_0\end{cases}$ $\Rightarrow x(t)=x_0e^t$ $t\to\infty$. $x(t)\to\infty$ (除非 $x_0=0$)

故解对初值的连续依赖性仅在有界闭区间内成立

def. $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta(\varepsilon)$, 只要 $|x_0-\phi(t_0)|<\delta$,

就有 $|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in R$

称 $x=\phi(t)$ 为 Lyapunov 稳定

def. 若 $x=\phi(t)$ 稳定, 且 $\exists\delta_1>0$, s.t. $|x_0-\phi(t_0)|<\delta_1$

就有 $\lim\limits_{t\to\infty}|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t)|=0$

称 $x=\phi(t)$ 为 Lyapunov 渐近稳定

def. $t>0$ 正向 $t<0$ 负向

仅考虑方程 (8.9) 零解的稳定性, 考虑变换 $y=x-\varphi(t)$

$\frac{dy}{dt}=\frac{d(x-\varphi(t))}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{d\varphi}{dt}=f(t,x)-f(t,\varphi(t))\triangleq g(t,y)$

且 $y\equiv0$ 为该方程的解, 将一般问题转化为特殊问题

日期:　　/

1、按线性近似判断

重新考虑 (8.9)

若 $x=0$ 为一个解，则 $f(t,0)=0$

将 $f(t,x)$ 在 $x=0$ 处展开 $f(t,x)=A(t)X+N(t,x)$ A为方阵

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|N(t,x)|}{|x|}=0$ 关于t一致

$(8.9)\Rightarrow \frac{dx}{dt}=A(t)x+N(t,x)$ (加入假设 A(t) 连续，N(t,x) 关于x lip)

(8.14)

对方程 $\frac{dx}{dt}=A(t)X$

若 $A(t)=A$ 为常数矩阵，有结论：

thm. 线性方程 (1) 零解正向(负向)渐近稳定

$\Leftrightarrow$ 所有特征根有负的(正的)实部

(2) 稳定

$\Leftrightarrow$ 实部非正(非负)

且实部为0的特征根对应Jordan可对角化

(3) 正向不稳定

$\Leftrightarrow$ 至少有一个特征根实部为正 / 至少有一个实部为0特征根

对应Jordan不可对角化

thm. 非线性方程 对(8.14)，A为常矩阵，若A所有特征值实部为负

则零解正向渐近稳定

pr. 要证 $\exists\delta$，$|x_0|<\delta$，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}|\underset{\substack{\shortparallel \\ x(t)}}{\varphi(t,x_0)}|=0$

A的所有特征值为负，则 $\exists\sigma>0$, s.t. $Re_{max}<-2\sigma$

$|e^{\lambda_s t}P_n(s)|\le e^{-2\sigma t}|P_n(s)|=e^{-\sigma t}e^{-\sigma t}|P_n(s)|\le A_0e^{-\sigma t}$

def. "|·|" 为最大元

为 $e^{-\sigma t}|P_n(s)|$ 最大元的界

日期: /

故 $|e^{tA}| \leq A_0 e^{-\sigma t}$

(8.14) <=> 积分方程 $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} N(s, x(s))\,ds$

pr. $\frac{dx}{dt} = Ax + N(t, x)$

$e^{-At}\left(\frac{dx}{dt} - Ax\right) = e^{-At} N(t, x)$

$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = e^{-At} N(t, x)$

积分 $e^{-At}x - x_0 = \int_0^t e^{-As} N(s, x(s))\,ds$

<=> $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} N(s, x(s))\,ds$

$|x(t)| \leq A_0|x_0|e^{-\sigma t} + \int_0^t A_0 e^{-(t-s)\sigma}|N(s, x(s))|\,ds$

由于 $\lim\limits_{|x|\to 0} \frac{|N(t,x)|}{|x|} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1$, st. $|x| \leq \delta_1$ 时, $|N(t,x)| \leq \varepsilon|x|$

故 $|x(t)| \leq A_0|x_0|e^{-\sigma t} + A_0\varepsilon \int_0^t e^{-(t-s)\sigma}|x(s)|\,ds$ (用到了 $x(s) \leq \delta$ 恒成立的假设)

$e^{\sigma t}|x(t)| \leq A_0|x_0| + A_0\varepsilon\int_0^t e^{\sigma s}|x(s)|\,ds$

由 Gronwall 知 $e^{\sigma t}|x(t)| \leq A_0|x_0|\, e^{A_0\varepsilon t}$

$\Rightarrow |x(t)| \leq A_0|x_0|e^{-(\sigma - A_0\varepsilon)t}$

选取极小的 ε, st. $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)| = 0$

现在证明 $\forall t \geq 0$, 有 $|x(t)| \leq \delta_1$

令 $T^* = \sup\{T \mid x(t) \leq \delta_1\ \forall t \in [0, T]\}$

$\Rightarrow x(T^*) = \delta_1$

且对 $\forall t \in [0, T^*]$, 有

$|x(t)| \leq A_0|x_0|e^{-\sigma t} + \int_0^t A_0 e^{-(t-s)\sigma}|N(s, x(s))|\,ds$

$\leq A_0|x_0|e^{-\sigma t} + A_0\varepsilon\int_0^t e^{-(t-s)\sigma}|x(s)|\,ds$

日期:　　/

再由 Gronwall 知 $|x(t)| \le A_0|x_0|e^{-(\sigma-A_0\varepsilon)t}$

取 $|x_0|$ s.t. $A_0|x_0| < \frac{\delta_1}{2}$，取 ε 充分小，则 $|x(t)| \le A_0|x_0| < \frac{\delta_1}{2}$ $\forall t\in[0,T^*)$

故取同时满足 $\begin{cases}|x_0|<\delta_1 \\ A_0|x_0|<\frac{\delta_1}{2}\end{cases}$ 的 δ_2，可推出矛盾

$\Rightarrow T^* = +\infty$

thm. 对 (8.14)，A 为常矩阵，若 A 所有特征值至少有一个正的实部

则零解不稳定

日期:　　/

2. 第二方法

考察自治系统 $\frac{dy}{dt}=f(y)$ (8.19)　f, f_{y_j} 在 $D\subset R^n$ 上连续

$f(0)=0$，且0为 f 的一个孤立临界点，即存在0点的邻域，在这个邻域上 $f(y)$ 无其他零点.

令 $V(y)$ 为 Ω 上的标量连续函数，$0\in\Omega$

def. V在 Ω 上正定，if. $V(0)=0$，且 $V(y)>0$，$\forall y\in\Omega\setminus\{0\}$

V在 Ω 上负定，if. $-V$ 在 Ω 上正定

def. ($V(y)$ 关于方程组 $\frac{dy}{dx}=f(y)$ 的导数)

$$V^*(y)=(\nabla V)\cdot f(y)$$
$$=\frac{\partial V}{\partial y_1}f_1(y)+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}f_n(y)$$

Rmk. $y=\varphi(t)$ 为解，则

$$\frac{d}{dt}(V(\varphi(t)))=\frac{\partial V}{\partial y_1}\varphi_1'+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}\varphi_n'$$
$$=\left.\frac{\partial V}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}f_n\right|_{\varphi(t)}$$
$$=V^*(\varphi(t))$$

thm. 若∃标量函数 $V(y)$ 在 $0\in\Omega$ 正定，且关于(8.19)有 $V^*(y)\le 0$，则(8.19)零解稳定.

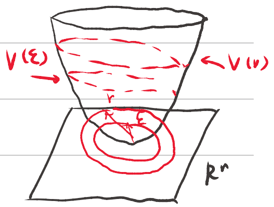
pr. 只需 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$. st. $|y_0|<\delta$，则 $|\varphi(t,y_0)|<\varepsilon$

令 $r>0$，∃ $\overline{B_r(0)}\subset\Omega$，取 $0<\varepsilon<r$，

$V(y)$ 在 $\overline{B_r(0)}$ 上正定，$V^*(y)\le 0$

令 $S=\{y\mid \varepsilon\le|y|\le r\}$

$V(y)$ 连续，令 $\mu=\min_{y\in S}V(y)>0$



日期:　　/

由于 $V(0)=0$，$V(y)$ 连续，

故 $\exists\delta$, st. $\forall |y|<\delta$，有 $|V(y)|<M$

首先添加条件 st. 经过 y_0 有唯一解 $\phi(t)$，$|y_0|<\delta$

设其存在区间为 $[0,t_1)$

$$\frac{d}{dt}(V(\phi(t))) = V^*(\phi(t)) \le 0$$

$\Rightarrow V(\phi(t)) \le V(\phi(0)) < M$ $(\phi(0)=y_0 \quad |y_0|<\delta)$

claim: $\forall t\in[0,t_1)$，$|\phi(t)|<\varepsilon$

否则 $\exists \bar{t}\in[0,t_1)$，$|\phi(\bar{t})|=\varepsilon$

$\Rightarrow \phi(\bar{t})\in S$，则 $V(\phi(\bar{t}))\geqslant M$ 矛盾

表明未在有限区域内达到无穷

由延拓定理 $t_1=+\infty$，即证明稳定性

thm. 若 $\exists V(y)$ 在 Ω 上正定且 $V^*(y)<0$，则 (8.19) 零解渐近稳定.

pr. 令 $r>0$，$\exists \overline{B_r(0)}\subset\Omega$，由上 thm. 零解稳定

取 $\varepsilon=r$，$\exists\delta>0$. st. $\forall y_0\in B_\delta(0)$，$|\phi_t(y_0)|<r$，$\forall t\geqslant 0$

要证 $t\to\infty$ 时，$|\underbrace{\phi_t(y_0)}_{=\phi(t)}|\to 0$

$$\frac{d}{dt}(V(\phi(t))) = V^*(\phi(t))<0$$

因此 $V(\phi(t))$ 关于 t 单调递减，故 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(\phi(t))$ 存在

下面要证 $\lim\limits_{t\to+\infty} V(\phi(t))$ 存在 $=0$

否则 $\exists\eta>0$. st. $\lim\limits_{t\to+\infty} V(\phi(t))=\eta \Rightarrow V(\phi(t))\geqslant\eta$

$V(y)$ 连续，$V(0)=0$，故 $\exists\alpha>0$，st. $\forall |y|<\alpha$，$V(y)<\eta$

故 $|\phi(t)|\geqslant\alpha$，$\forall t\geqslant 0$

日期: /

令 $S=\{y \mid \alpha \le |y| \le r\}$ $V^*(y)$ 在 S 上有最大值记为 $-M$ $M>0$

故 $\frac{d}{dt}V(\phi(t)) = V^*(\phi(t)) \le -M$

积分 $\Rightarrow V(\phi(t)) \le V(\phi(0)) - Mt$

令 $t\to\infty$, 知 $V(\phi(t))<0$ 矛盾

thm. 若 ∃ 连续函数 $V(y)$ 满足 $V(0)=0$, s.t. $V^*(y)$ 正定

且在原点的任何邻域内存在 a, st. $V(a)>0$

则零解不稳定.

pr. $\exists \varepsilon>0$, st. $\forall \delta>0$, $\exists a\in B_\delta(0)$, st. $|\phi_t(a)|=\varepsilon$, $\exists t$

令 $r>0$, $\exists \overline{B_r(0)} \subset \Omega$, 由于 V 在 Ω 上连续,

故 V 在 $\overline{B_r(0)}$ 上有界: $\exists M>0$, st. $|V(y)|\le M$, $\forall y\in \overline{B_r(0)}$

$\forall \delta>0$, $\exists a\in B_\delta(0)$. st. $V(a)>0$, 下证 $\exists t$ st. $|\phi_t(a)|=r$

否则假设 $\phi_t(a)\in B_r(0)$, $\forall t\ge 0$, 由延拓 thm, $\phi_t(a) \triangleq \phi(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在

由 $\frac{d}{dt}(V(\phi(t))) = V^*(\phi(t)) \ge 0 \Rightarrow V(\phi(t)) \ge V(\phi(0)) \triangleq V(a)>0$

由 $V(0)=0$. $\exists \alpha>0$, st. $|V(y)|<V(a)$, $\forall |y|<\alpha$

$\Rightarrow \alpha \le |\phi(t)| \le r$

令 $S=\{y \mid \alpha\le |y|\le r\}$, 则 $V^*(y)$ 在 S 上有正的下界 M

$V^*(y)\ge M$ $\forall y\in S$

故 $\frac{d}{dt}(V(\phi(t)) = V^*(\phi(t)) \ge M$.

$\Rightarrow V(\phi(t)) \ge V(\phi(0)) + Mt = V(a)+Mt$.

故 $t\to\infty$ 时, $V(\phi(t)) \to +\infty$

与 $V(\phi(t))\le M$ 矛盾

日期:　　/

thm. 若∃函数 V s.t. 在 $\Omega \ni 0$ 上 $V^* = \lambda V + W$ $(\lambda > 0)$

W 或者恒为零或者恒非正，恒非负且使得

在原点上任何邻域内存在一点 a，有 $V(a) \cdot W(a) > 0$

则零解不稳定

ex. $y'' + g(y) = 0$ 在 $|y| < k$ 上连续，$g(0) = 0$，$y g(y) > 0$

$y'y'' + g(y) y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 + \int_0^y g(s) ds = C$　能量

令 $y_1 = y$　　$\frac{dy_1}{dx} = y_2$

　$y_2 = y'$　　$\frac{dy_2}{dx} = -g(y_1)$

$V(y_1, y_2) \triangleq \frac{1}{2}(y_2)^2 + \int_0^{y_1} g(s) ds > 0$，$\forall (y_1, y_2) \neq 0 \in \Omega$

$V^*(y) = g(y_1) \cdot y_2 + y_2(-g(y_1)) = 0$　　$\Omega = \{(y_1, y_2) \mid |y_1| < k, -\infty < y_2 < +\infty\}$

$\Rightarrow$ 零解稳定

但不渐近稳定，$\forall (y_{10}, y_{20})$

令 $\phi(t)$ 为以 (y_{10}, y_{20}) 为初值的方程的解

则 $\frac{d}{dt}(V(\phi(t))) = V^*(\phi(t)) = 0$

$\Rightarrow V(\phi(t)) = V(\phi(0)) \neq 0$　故 $|\phi(t)|$ 不趋于 0

V通常难找，方程应有物理意义

ex. (Lienard 方程)

$y'' + y' + g(y) = 0$，$g(y)$ 满足前面假设

讨论零解稳定性

令 $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases}$　则 $\frac{dy_1}{dt} = y_2$

$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 - g(y_1)$

日期: /

def. $V(y_1,y_2)=\frac{1}{2}y_2^2+\int_0^{y_1}g(s)ds$

$\Omega=\{(y_1,y_2)\mid |y_1|<k, -\infty<y_2<+\infty\}$

则 V在 Ω 上正定

$V^*(y_1,y_2)=g(y_1)y_2+y_2(-y_2-g(y_1))=-y_2^2\le 0$

故零解是稳定的.

def. $V(y_1,y_2)=\frac{1}{2}y_2^2+\int_0^{y_1}g(s)ds+\beta g(y_1)y_2$

$\geq\frac{1}{2}y_2^2+\int_0^{y_1}g(s)ds-\frac{\beta}{2}(g(y_1)^2+y_2^2)$

$\lim_{|y_1|\to 0}\frac{g(y_1)^2}{\int_0^{y_1}g(s)ds}=\lim_{|y_1|\to 0}\frac{2g(y_1)g'(y_1)}{g(y_1)}=2g'(0)$

$\exists k_1$, s.t. $|y_1|<k_1$时, $|g(y_1)|^2\le C\int_0^{y_1}g(s)ds$

故 $V(y_1,y_2)\geq\frac{1}{2}(1-\beta)y_2^2+\int_0^{y_1}g(s)ds\,(1-\frac{\beta C}{2})>0$

iff $\beta<\min\{1,\frac{2}{C}\}$

hope $V^*<0$

$V^*(y_1,y_2)=(g(y_1)+\beta g'(y_1)y_2)y_2+(y_2+\beta g(y_1))(-y_2-g(y_1))$

$=-y_2^2-\beta g^2(y_1)+\beta g'(y_1)y_2^2-\beta g(y_1)y_2$

$|g'(y_1)|\le M$, 当 $|y_1|<k_1$

$\le -y_2^2-\beta g^2(y_1)+M\beta y_2^2+\frac{\beta}{2}(g^2(y_1)+y_2^2)$

$=(-1+M\beta+\frac{\beta}{2})y_2^2-\frac{\beta}{2}g(y_1)^2$

再取 $0<\beta$ 且 s.t. $M\beta+\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}$, 可使 $V^*(y_1,y_2)<0$

故零解渐近稳定

ex. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=(\varepsilon x+2y)(z+1)\\ \frac{dy}{dt}=(-x+\varepsilon y)(z+1)\\ \frac{dz}{dt}=-z^3\end{cases}$ 平衡点的稳定性

日期:　　/

平衡点 $z=0$

$$\begin{cases} \varepsilon x+2y=0 \\ -x+\varepsilon y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 平衡点为 $(0,0,0)$

线性化方程为 (只考虑线性部分)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\varepsilon x+2y \\ \frac{dy}{dt}=-x+\varepsilon y \\ \frac{dz}{dt}=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A的特征值为 $-\lambda(\lambda-\varepsilon)^2+2$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\varepsilon+\sqrt{2}i,\ \lambda_3=\varepsilon-\sqrt{2}i$

① $\varepsilon>0$，则零解不稳定

② $\varepsilon<0$，则零解线性稳定

def. $V(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$ (从简单形式设起)

$V^*=2ax(\varepsilon x+2y)(z+1)+2by(-x+\varepsilon y)(z+1)+2cz(-z^3)$

$\quad=(2a\varepsilon x^2+(4a-2b)xy+2b\varepsilon y^2)(z+1)-2cz^4$

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z>-1\}$ 上，令 $a=1,\ b=2,\ c=1$

$V^*=(2\varepsilon x^2+4\varepsilon y^2)(z+1)-2z^4<0 \quad \forall\ \Omega\setminus\{0\}$

则零解渐近稳定

③ $\varepsilon=0$，方程即 $\frac{dx}{dt}=2y(z+1)$　　　　$x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{dy}{dt}=-x(z+1)$　　　　$\frac{1}{2}x^2+y^2=C$

$\frac{dz}{dt}=-z^3 \Rightarrow z=\frac{1}{(2t+C)^{\frac{1}{2}}}$

日期:　　　/

故零解稳定但不渐近稳定

§ 平面上的动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)\end{cases}\qquad (8.20)$$

X、Y为平面上连续可微函数

def. (x_0,y_0)为(8.20)的初等奇点

$$X(x_0,y_0)=0,\quad Y(x_0,y_0)=0$$

$$\det\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x_0,y_0)}\neq 0$$

若$(0,0)$为(8.20)初等奇点，令 $a=\frac{\partial X}{\partial x}(0,0)$，$b=\frac{\partial X}{\partial y}(0,0)$，$c=\frac{\partial Y}{\partial x}(0,0)$，$d=\frac{\partial Y}{\partial y}(0,0)$

故原方程 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dx}{dt}=ax+by+\varphi(x,y)$

$$\frac{dy}{dt}=cx+dy+\psi(x,y)$$

线性化：$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ T为常数矩阵

$$T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

选取T st. $T^{-1}AT$为Jordan型，故不妨设A为Jordan型

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&\\&\mu\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix}\lambda&\\1&\lambda\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}\qquad \beta\neq0,\ \lambda,\mu\neq0$$

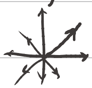
(1) $A=\begin{pmatrix}\lambda&\\&\mu\end{pmatrix}$

此时 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=\mu y\end{cases}$ $\quad\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\mu}{\lambda}\dfrac{y}{x}\ (x\neq0)\Rightarrow y=C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}\quad C\in\mathbb{R}$

双向结点.

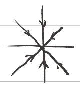
画相图描述动力性质

① $\mu=\lambda>0$



(直线族)

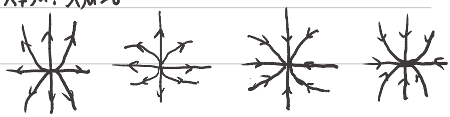
② $\mu=\lambda<0$



(直线族)

星形结点..

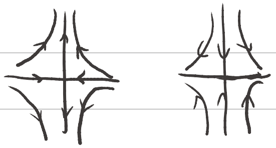
③ $\lambda\neq\mu,\ \lambda\mu>0$



$\mu>\lambda>0$ $\quad\lambda>\mu>0$ $\quad\lambda<\mu<0$ $\quad\mu<\lambda<0$

鞍点

④ $\lambda \neq 0$, $\lambda\mu < 0$



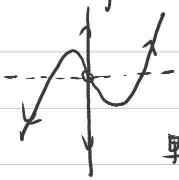
$\lambda < 0 < \mu$.

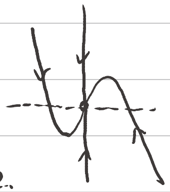
(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \lambda y \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} + \frac{y}{x}$$

$u = \frac{y}{x}$ $\quad u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\lambda} + u \Rightarrow u = \frac{1}{\lambda}\ln|x| + C \Rightarrow y = \frac{1}{\lambda}x\ln|x| + Cx$

若 $x \equiv 0$, $y = e^{\lambda t}$





单向结点.

$\lambda > 0$ $\qquad\qquad$ $\lambda < 0$

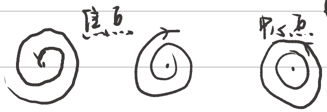
(3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

令 $y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$

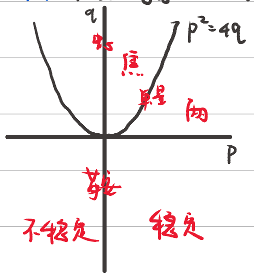
则 $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \alpha r \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \beta \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{matrix} r(t) = Ce^{\alpha t} & C > 0 \\ \theta(t) = \beta t & \beta > 0 \text{ 逆时针} \\ & \beta < 0 \text{ 顺时针} \end{matrix}$

焦点. $\qquad\qquad$ 中心点.



$\alpha < 0$, $\beta > 0$ $\qquad$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\qquad$ $\alpha = 0$ $\beta > 0$

thm. P265 8.5 (初等奇点类型判断)



$p = -trA = -(a+d)$

$q = \det A = ad-bc$

当 $t\to+\infty$/$-\infty$ 时，有的轨线沿某个方向趋向/远离奇点

该方向为特殊方向（双向: 2
单向: 1
鞍: 2）

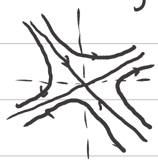
ex. $\frac{dx}{dt} = 2x+3y$

$\frac{dy}{dt} = 2x-3y$ 求[0.0]附近相图

(0.0)为奇点， $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $p=1,\ q=-12<0$

鞍点，有2个特殊方向，设 $y=kx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-3y}{2x+3y}$ $k=\frac{2-3k}{2+3k} \Rightarrow k_1=\frac{1}{3},\ k_2=-2$



$(x,y)=(1,0)$处， $\frac{dx}{dt}>0,\ \frac{dy}{dt}>0$

ex. $\frac{dx}{dt} = 3x$

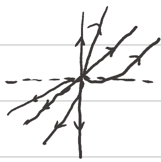
$\frac{dy}{dt} = 2x+y$

$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $p=-trA=-4$ $q=3$

$p^2-4q>0$

双向结点，有2个特殊方向

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{3x}$ $k=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}k \Rightarrow k=1$



设特殊方向为 $x=ky$，则 $k=\frac{3k}{2k+1} \Rightarrow k_1=0,\ k_2=1.$

日期:　　　/

已经解决了线性系统相图

Nullcline 方法，解决非线性系统

ex. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x - 2 \end{cases}$　　x- Nullcline $y = x^2$　　y-Nullcline $x = 2$

平衡点为 (2,4)

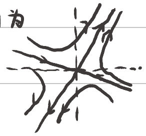
令 $\tilde{x} = x-2$，$\tilde{y} = y-4$，原方程化为 $\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = -4\tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{x}^2 \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} \end{cases}$　　(※) 平衡点为 (0,0)

线性化 $\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = -4\tilde{x} + \tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　$p = 4$，$q = -1$　(0,0) 为鞍点。

设 $\tilde{y} = k\tilde{x}$ 为特殊方向　$k = \frac{1}{-4+k}$　　$k_1 = 2+\sqrt{5}$，$k_2 = 2-\sqrt{5}$

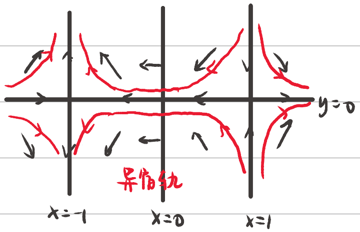
相图为



取 (1,0)，表明方向为 ↖

ex $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x(y - a(x - \frac{1}{x})) \end{cases}$　　a 为常数

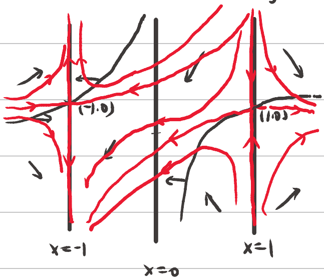
① $a = 0$　$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -xy \end{cases}$　　X- Nullcline　$x = \pm 1$　　y-Nullcline　$x/y = 0$



② $a>0$

x-Nullcline　　$x=1,\ x=-1$

y-Nullcline　　$x=0,\ y=a(x-\frac{1}{x})$



线性化分析　$(-1,0)$，$(1,0)$ 为鞍点.

③ $a<0$