微分方程引论第二次习题课讲义

助教：王鼎涵

2023 年 9 月 24 日

Programmer: Talk is cheap, show me your code!

Mathematician: Talk is cheap, solve the ODE!

注记：9 月 24 日习题课上讲解的内容包括本讲义第二部分 (作业题) 的全部内容，以及第三部分的例题 1，例题 5，例题 7。本讲义中除了第二部分作业题以及第三部分例题 1-例题 3 以外的内容均为拓展，本课程不做要求。

1 知识回顾

警告：本节的目的是给出常微分方程的“解”和“积分曲线”的一个确切含义，大家如果学习时没有感到什么困惑 (比如为什么 dy 和 dx 可以从求导符号 $\frac{dy}{dx}$ 中脱离独立参与运算？)，就没有必要阅读本节。把它放在第一部分只是为了和我在习题课上讲的顺序相符。

在课堂上，我们非常熟悉下面形式的方程

$$y' = f(x, y),$$

其中等式两边都是 n 维向量，$f(x, y)$ 是一个定义在 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 中的至少是连续的函数。我们所谓方程的**解**是一个定义在某区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的 C^1(向量值) 函数 $\phi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$，使得对任意的 $x \in I$，$(x, \phi(x)) \in D$，并且满足

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)),$$

请注意，上面的等式两边都是 n 维向量。这时我们说方程的一条**积分曲线**，指的便是一个解的图像 $\Gamma(\phi) \subset D$。

事实上，我们还可以通过引入 $y_{n+1} = x$，$y'_{n+1} = 1$ 来将这个 n 维的一阶微分方程化为 $n+1$ 维的一阶**自治**微分方程，即等式右端的 f 不依赖于自变量 x，

$$y' = f(y),$$

不过这里等式两边都变成了 $n+1$ 维向量。

为了不让大家一开始就陷入令人绝望的抽象中，我们用最熟悉的 $y' = f(x, y)$ 举个例子，其中等式两边都是在 $\mathbb{R}^1$ 中。这里我们把它化为自治方程的操作就是令 $y_1 = y$，$y_2 = x$，$f_1(y_1, y_2) = f(y_2, y_1)$，$f_2(y_1, y_2) = 1$。于是原方程等价于下面的 2 维一阶自治方程组

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2) = 1 \end{cases}$$

因此，下面我们将总是讨论自治方程 (下面我们还是回到 n 维方程的情况，这里一般 $n \geqslant 2$)。我们先引入一些标准的定义来描述上面的情景。

定义 1 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，我们说 U 上的一个**向量场**，是指一个连续的映射

$$X : U \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto X(p) = X^1(p)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^n(p)\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

其中 $X^1(p), \cdots, X^n(p)$ 是 U 上的 n 个连续函数，$\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基 *(*$\frac{\partial}{\partial x^i}$ 对应 $\mathbb{R}^n$ 中只有第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的向量*)*。我们把 U 上所有向量场的集合记作 $\mathfrak{X}(U)$。

定义 2 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，我们说 U 上的一条 *(***正则***)* **参数曲线**，是指如下的 C^1 映射

$$\gamma : (a, b) \to U, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

并且满足对于任意的 $t \in (a, b)$，$\gamma'(t) \neq 0$。

这里“正则”指的就是 γ 的切向量 $\gamma'(t)$ 处处不为 0，我们下面总是要求这点而省略“正则”二字。

定义 3 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，U 上的一个**微分** *1***-形式**是指如下的连续映射

$$\omega : U \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \omega(p) = \omega_1(p)dx^1 + \cdots + \omega_n(p)dx^n.$$

其中 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是 U 上的 n 个连续函数，$dx^1, \cdots, dx^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 *(*另*)* 一组基。我们把 U 上所有微分 *1*-形式的集合记作 $\Omega^1(U)$。

注记 这里在定义向量场和微分 1-形式时用到了 $\mathbb{R}^n$ 中的两组基，即 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 和 $dx^1, \cdots, dx^n$。同学们可以不去追究后面这组基究竟指的是哪些向量，以及这两组基的关系。实际上，这两组基 (因此向量场在一点的取值和微分 1-形式在一点的取值) 是生活在不同的线性空间中的，这两个线性空间互为对偶空间，但是它们都同构于 $\mathbb{R}^n$，同学们可以 (暂时) 忽视这些细节。

定义 4 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，$\gamma : (a, b) \to U$ 是 U 上的一条参数曲线，$\omega \in \Omega^1(U)$ 是 U 上的一个微分 *1*-形式。我们称微分形式 ω 在映射 γ 下的**拉回**$\gamma^*\omega$ 为如下的 (a, b) 上的一个微分 *1*-形式 *(*我们用 t 表示 $\mathbb{R}$ 上的坐标*)*

$$\gamma^*\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \cdot (\gamma^i)'(t)\right) dt,$$

其中 $\gamma^1, \cdots, \gamma^n$ 是 γ 的 n 个分量。

用刚刚定义的术语，我们说一个常微分方程是指如下的方程

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

其中 $\gamma : (a, b) \to U$ 是待求的一条参数曲线，$X \in \mathfrak{X}(U)$ 是一个向量场。有时我们也加上一个初值条件 $\gamma(0) = p \in U$。所以，一个常微分方程就和一个向量场一一对应。现在我们现在可以给积分曲线一个新的定义。

定义 5 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，$X \in \mathfrak{X}(U)$ 是一个向量场。如果一条参数曲线 $\gamma : (a, b) \to U$ 满足

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)),$$

那么我们称参数曲线 γ 为向量场 X 的一条**积分曲线**。

注记 由于我们总是考虑正则参数曲线的情形，所以我们的定义不包含“奇解”，比如 $\gamma(t) = p \in \mathbb{R}^n$ 恒为常数的解。

不过，这样定义的积分曲线是一个映射，而不是我们通常想象的几何对象，这有时会给我们带来一些麻烦。比如我们经常遇到如下形式的方程 (比如柳斌书上定义 2.1 中的方程)，

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

首先要正确解释这个方程的含义：等式左边是一个 U 上的微分 1-形式 ω，我们要找到一条 U 中的“积分曲线”，使得 ω“限制”在这条“积分曲线”上是 0。如果用参数曲线的语言来说，就是寻找 $\gamma : (a,b) \to U,\ t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$，使得

$$\gamma^*\omega = (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))\, dt = 0.$$

可是很明显，这里有两个待定函数 $x(t), y(t)$，却只有一个方程，所以是定不下来 $\gamma(t)$ 的。事实上，我们这里参数化的选取是不重要的，也就是即使变换参数化后，这个方程仍然成立。具体来说，如果 $\tilde{\gamma} : (c,d) \to U,\ t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 是另一个参数化，我们假设 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 都是单射 (根据曲线的切向量不为 0，通过缩小 (a,b) 和 (c,d) 这总是可以办到的)，并且 $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\tilde{\gamma})$，那么

$$\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma} : (c,d) \to (a,b)$$

是一个 C^1-同胚 (这里需要 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 都是正则曲线，利用反函数定理可以说明这里 $\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ 是 C^1 的，感兴趣的同学可以尝试证明)。简单的计算表明，

$$(\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma})^*(\gamma^*\omega) = P(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\tilde{x}'(t) + Q(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t) = \tilde{\gamma}^*\omega,$$

从而可见 $\gamma^*\omega = 0$ 当且仅当 $\tilde{\gamma}^*\omega = 0$。

从这个例子我们可以看出，“积分曲线”应当是一个 (与参数化选取无关的) 几何对象，它应该是 $\mathrm{Im}(\gamma)$ 而不是映射 γ 本身。为此我们引入下面的定义。

定义 6 我们称 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个d **维子流形**，如果对于任意的 $p \in M$，都存在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^n$ 以及微分同胚 $\Phi : U \to V$，使得

$$\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

对于 $p \in M$，我们定义 M 在 p 点处的**切空间**T_pM 为下面的线性空间 *(*这是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间*)*

$$T_pM = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \gamma(0) = p,\ \gamma \in C^1\}.$$

定义 7 设 $\omega \in \Omega^1(U)$ 是一个 $\mathbb{R}^2$ 中开集 U 上的一个微分 *1*-形式。对于常微分方程

$$\omega = 0,$$

我们称它的**积分曲线**是一个 1 维的子流形 $\Gamma \subset U$，使得

$$\iota^*\omega = 0,$$

其中 $\iota : \Gamma \to U$ 是嵌入映射 *(*我们通常说 ω 限制在 Γ 上是 *0)*。

注记 (1) 利用子流形的语言，我们可以重述**隐函数定理**如下。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是一个 C^1 的映射。如果对任意的 $p \in f^{-1}(0)$，$\mathrm{rank}(df(p)) = m$，那么 $f^{-1}(0)$ 是一个余维数 (= 背景

空间维数 − 子流形维数) 为 m 的子流形。于是隐函数定理将是一个决定子流形 (积分曲线) 的有力工具。

(2) 这里的定义只包含了 $n=2$ 的场景，这时因为一般使一个微分 1-形式等于 0 的东西是一个余 1 维的子流形，只有 $n=2$ 时余维数为 1 的子流形同时是维数为 1 的子流形，所以只有 $n=2$ 时才会出现由微分 1-形式定义的方程。

我们直观上可以认为 1 维子流形是一个在每个点的局部看都像是一条曲线的东西。事实上，每一个 1 维子流形在局部上都由之前定义的参数曲线所给出，也就是对于任意的 $p\in\Gamma$，都存在开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，以及参数曲线 $\gamma:(a,b)\to U$，使得 $\Gamma\cap U=\mathrm{Im}(\gamma)$。此时子流形在 p 处的切空间 $T_p\Gamma$ 就是局部参数化的切向量 $\gamma'(\gamma^{-1}(p))$ 生成的 1 维子空间。而且在这个局部上，我们可以认为 $\iota^*\omega=\gamma^*\omega$。

令人开心的是，我们这里通过“子流形”的定义其实可以部分涵盖上面用参数曲线的定义。之所以说是“部分涵盖”，是因为正则参数化的图像未必是一个子流形，比如参数化的像集可能出现“自交点”，另一个著名的反例是环面上的无理稠密曲线 (可以参考柳斌书的 8.4 节)。出现这些问题的本质原因大概是局部上的分析性质不能决定整体上的拓扑性质，不过我们这里不细究这些。

定义 8 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，$X\in\mathfrak{X}(U)$ 是一个向量场，$\Gamma\subset U$ 是一个 1 维子流形。我们称向量场 X 与子流形 Γ **相切**，指的是对于任意的 $p\in\Gamma$，有 $X(p)\in T_p\Gamma$。此时，我们也称 Γ 是向量场 X 的一条**积分曲线**。

第一眼看，好像子流形与向量场相切只是保证了局部参数化的 $\gamma'(t)=\alpha(t)X(\gamma(t))$，其中我们可以假设 $\alpha(t)>0$(>0 不是本质的，我们要用 $\neq 0$)，不过我们总可以通过调整子流形 Γ 的局部参数化使得这里的 $\alpha(t)=1$，从而与之前将参数曲线作为积分曲线的定义相符。

定理 1 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，$X\in\mathfrak{X}(U)$ 是一个向量场，$\Gamma\subset U$ 是一个与 X 相切的 1 维子流形。那么对于任意的 $p\in\Gamma$，存在开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，以及参数曲线 $\gamma:(a,b)\to U$，使得 $\Gamma\cap U=\mathrm{Im}(\gamma)$，并且 $\gamma'(t)=X(\gamma(t))$。

证明：先随便取一个 Γ 的局部参数化 $\tilde\gamma:(a,b)\to U$，假设 $\tilde\gamma'(t)=\alpha(t)X(\tilde\gamma(t))$，其中 $\alpha(t)>0$。我们令

$$\phi:(a,b)\to(0,c),\quad t\mapsto\phi(t)=\int_a^t\alpha(s)\ ds,$$

其中 $c=\int_a^b\alpha(s)\ ds$。于是 ϕ 是 C^1 的双射，且导数 $\phi'(t)=\alpha(t)>0$，于是根据反函数定理，$\phi^{-1}:(0,c)\to(a,b),\ s\mapsto\phi^{-1}(s)$ 也是 C^1 的，并且 $(\phi^{-1})'(s)=\frac{1}{\alpha(\phi^{-1}(s))}$。我们考虑参数化 $\gamma=\tilde\gamma\circ\phi^{-1}:(0,c)\to U$，它满足

$$\gamma'(s)=\tilde\gamma'(\phi^{-1}(s))\frac{1}{\alpha(\phi^{-1}(s))}=\frac{\alpha(\phi^{-1}(s))X(\tilde\gamma(\phi^{-1}(s)))}{\alpha(\phi^{-1}(s))}=X(\gamma(s)).$$

□

<u>作为总结</u>，我们有 3 种关于积分曲线的 (不完全等价的) 定义：

- 作为解函数的图像——优点是直观，缺点是涵盖的范围太小；
- 作为参数曲线——优点是直观，缺点是参数化的选取不唯一，以及参数化未必能得到几何上具有良好结构的图形；
- 作为与给定向量场相切的子流形——优点是定义了一个几何对象，而不依赖于具体的参数化，而且基本上能够涵盖上面两种定义，缺点是所有事情只能在局部上讨论，而且不直观。

2 作业题

题目 P27 2(2) 求解微分方程 $y'=y^a$，其中 $a=\frac{1}{5}$，1，2，并作出积分曲线的草图。

解答 当 $a=\frac{1}{5}$ 时，$y(x)=0$，$x\in\mathbb{R}$ 是特解，通解计算如下

$$y^{-1/5}dy=dx \implies \frac{5}{4}y^{\frac{4}{5}}=x+C \implies y=\pm\left(\frac{4}{5}(x+C)\right)^{\frac{5}{4}},\quad x\geqslant C,$$

这里 C 为任意实数。还可以注意到将零解与通解拼接便得到 $\mathbb{R}$ 上的解。

当 $a=2$ 时，$y(x)=0$，$x\in\mathbb{R}$ 是特解，通解计算如下

$$y^{-2}dy=dx \implies \frac{-1}{y}=x+C \implies y=\frac{-1}{x+C},\quad x\neq -C,$$

这里 C 为任意实数。

当 $a=1$ 时除零解仍是特解外，

$$\frac{dy}{y}=dx \implies \log|y|=x+C \implies y=\pm e^{x+C},$$

于是通解为

$$y=Ce^x,$$

这里 C 为任意实数。 □

题目 P27 3 设有微分方程

$$y'=f(y),$$

其中 $f(y)$ 在 $y=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(y)=0$ 当且仅当 $y=a$。证明：对于直线 $y=a$ 上任一点 (x_0,a)，该方程满足条件 $y(x_0)=a$ 的解存在且唯一的充要条件为

$$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{1}{f(y)}dy\right|=+\infty,$$

其中 ε 是任意正数。

解答 由于 $y=a$ 显然是初值问题的解，我们只要证明 $y=a$ 是唯一的解等价于反常积分发散。

一边的证明是标准的。如果反常积分发散，且存在一个不恒为 a 的解 $y(x)$，这是一个定义在 x_0 邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上的 C^1 函数且不妨设存在 $x_1\in(x_0,x_0+\delta)$ 使得 $y(x_1)>a$ (请注意，这里的不妨实际上取了四种情况中的一个)，我们令

$$x_2=\sup\{x\in[x_0,x_1]\mid y(x)=a\},$$

根据 $y(x)$ 的连续性知 $x_2<x_1$，并且根据 x_2 的定义，$y(x)$ 在 $(x_2,x_1]$ 上是恒大于 a 的。再注意到 $f(y)$ 在 $y>a$ 上是不为零的 (实际上根据我们的不妨，它是恒正的)，从而 $y'(x)=f(y(x))>0$ 即 $y(x)$ 在 $(x_2,x_1]$ 上是严格递增的，根据反函数定理，$y(x)$ 具有 C^1 的反函数。现在在 $(x_2,x_1]$ 上我们有

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))}=1,$$

对两边在 $[\xi,x_1]$ 上积分，其中 $\xi\in(x_2,x_1)$，并且利用换元得到

$$x_1-\xi=\int_\xi^{x_1}1dx=\int_\xi^{x_1}\frac{y'(x)}{f(y(x))}dx=\int_{y(\xi)}^{y(x_1)}\frac{dy}{f(y)},$$

现在令 $\xi \to x_2^+$，上式左边极限是 $x_1 - x_2$，而右边是发散的，这便得到了矛盾。

为了证明另一边，我们不妨假设 $0 < \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{f(y)} dy < +\infty$。定义函数

$$X(y) = x_0 + \int_a^y \frac{1}{f(t)} dt, \quad y \in [a, a+\varepsilon].$$

我们有 $X(y)$ 在 $[a, a+\varepsilon]$ 上连续，在 $(a, a+\varepsilon)$ 上 C^1，并且 $X(a) = x_0$，$X'(y) = \dfrac{1}{f(y)} > 0$。根据反函数定理，存在 $X(y)$ 的反函数 $Y(x)$ 满足在 $[x_0, X(a+\varepsilon)]$ 上连续，在 $(x_0, X(a+\varepsilon))$ 上 C^1，并且 $Y(x_0) = a$，

$$Y'(x) = \frac{1}{X'(Y(x))} = f(Y(x)), \quad x \in (x_0, X(a+\varepsilon)).$$

令 $x \to x_0^+$，得到

$$\lim_{x \to x_0^+} Y'(x) = \lim_{y \to 0^+} f(y) = 0,$$

这表明 $Y(x)$ 实际上在 $[x_0, X(a+\varepsilon))$ 上是 C^1 的。从而 $Y(x)$ 是初值问题不恒为 a 的解，矛盾。□

注记 对于一般的函数 $F(x, y)$，我们不能认为 $F(x, y) = 0$ 确定了一条过 (x_0, y_0)(这里 $F(x_0, y_0) = 0$) 的“曲线”(通常是我们要找的积分曲线)，因为这里 F 的定义域未必是包含 (x_0, y_0) 的开集，我们无法直接使用隐函数定理得到结果。比如这道题中使用“分离变量后两边积分”的办法得到的函数是

$$F(x.y) = \int_a^y \frac{1}{f(t)} dt - x + x_0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, \infty),$$

方程初始条件对应的点 (x_0, a) 位于 F 定义域的边界上。我们这里的推导是高度依赖 F 的具体形式的。我们有下面这个经典的反例 (可以参考第一次习题课讲义):

$$y' = x f(y), \quad y(0) = 0,$$

其中

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{y}, & y \geqslant 0 \\ \sqrt{-y}, & y < 0 \end{cases}$$

这里积分 $\int_0^y \frac{1}{f(t)} dt = -2\sqrt{|y|}$ 是收敛的，于是“分离变量后两边积分”得到的函数

$$F(x, y) = \int_0^y \frac{1}{f(t)} dt - \int_0^x x dx = -2\sqrt{|y|} - \frac{1}{2} x^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

是良好定义的。但 $F(x, y) = 0$ 不能确定一条过原点 $(0, 0)$ 的积分曲线，因为只有一个点 $(0, 0)$ 满足 $F(x, y) = 0$。事实上该方程满足初值 $y(0) = 0$ 的解是唯一的，只有零解。

题目 P32 2 求出微分方程

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

的当 $x \to \dfrac{\pi}{2}$ 时仍有界的解。

解答 由于问题在 $\frac{\pi}{2}$ 的局部，我们先在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上求解。对于 $y(x)\in C^1((0,\frac{\pi}{2}))$ 满足方程

$$
\begin{aligned}
&\iff y'(x)-\frac{2}{\sin x}y(x)=\frac{2\cos x}{\sin 2x}\\
&\iff \left(e^{-\int_{\pi/4}^{x}\frac{2}{\sin 2s}ds}y(x)\right)'=e^{-\int_{\pi/4}^{x}\frac{2}{\sin 2s}ds}\cdot\frac{2\cos x}{\sin 2x}\\
&\iff \left(\frac{y(x)}{\tan x}\right)'=\frac{\cos x}{\sin^2 x}\\
&\iff y(x)=\tan x\left(C+\int_{\pi/4}^{x}\left(-\frac{1}{\sin s}\right)'ds\right)\\
&\iff y(x)=C\tan x-\frac{1}{\cos x},\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

易见只有 $C=1$ 时才能保证 $y(x)$ 在 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时有界 (此时 $\lim\limits_{x\to\pi/2}y(x)=0$)。

同理，在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上求解，得到相同的表达式。上面的计算表明，题目中要求的解限制在 $\frac{\pi}{2}$ 的一个空心邻域内一定形如

$$y(x)=\tan x-\frac{1}{\cos x}.$$

不难验证，如果补充定义 $y(\frac{\pi}{2})=0$，则得到的在 $\frac{\pi}{2}$ 邻域内定义的解 $y(x)$ 是 C^1 的。综上，我们得到题目中要求的解在 $\frac{\pi}{2}$ 的一个邻域内一定是

$$
y(x)=\begin{cases}\tan x-\dfrac{1}{\cos x}, & x\ near\ \dfrac{\pi}{2},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}
$$

□

题目 P33 4　求出微分方程 $y'=2y\cos^2 x-\sin x$ 的周期解。

解答 周期解一定是在 $\mathbb{R}$ 上定义的解 (因为我们总考虑在一个区间上定义的解)。于是我们在 $\mathbb{R}$ 上求解方程：对于 $y(x)\in C^1(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
&\iff \left(e^{-\int_0^x 2\cos^2 s ds}y(x)\right)'=-e^{-\int_0^x 2\cos^2 s ds}\sin x\\
&\iff e^{-x-\frac{\sin 2x}{2}}y(x)=C-\int_0^x e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin s ds\\
&\iff y(x)=e^{x+\frac{\sin 2x}{2}}\left(C-\int_0^x e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin s ds\right),\quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

下面我们声称如下事实：对于满足解的局部唯一性的 (比如 f 对于 y 是局部 Lipschitz 的) 方程 $y'=f(x,y)$，其中 f 对于 x 以 ω 为周期，即 $f(x+\omega,y)=f(x,y)$，对任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$。那么方程的任一周期解 $y(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 一定也以 ω 为周期。

上述事实的证明：假设 $y(x)$ 是一个周期解，$y(x+\omega)$ 也是解。由于周期解 $y(x)$ 的最大最小值一定能被取到，即存在 x_1，$x_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$y(x_1+\omega)\leqslant y(x_1),\quad y(x_2+\omega)\geqslant y(x_2).$$

于是存在 $x_3\in\mathbb{R}$ 使得

$$y(x_3+\omega)=y(x_3).$$

根据解的唯一性知 $y(x+\omega)=y(x)$，对于任意的 $x\in\mathbb{R}$。

回到本题，根据上面的事实，我们只要要求 $y(x)$ 以 2π 为周期，即

$$y(x+2\pi)=y(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

而这又等价于

$$y(2\pi)=y(0).$$

于是我们可以确定

$$C=e^{2\pi}\left(C-\int_0^{2\pi}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds\right),$$

即

$$C=\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds.$$

综上，方程的周期解为

$$y(x)=e^{x+\frac{\sin 2x}{2}}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds-\int_0^{x}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds\right).$$

□

注记 (1) 如果我们要求 $y(0)=y(2\pi n)$，可以得到

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{1-e^{-2\pi n}}\int_0^{2\pi n}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds\\&=\frac{1}{1-e^{-2\pi n}}\sum_{k=1}^{n}\int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds\\&=\frac{1}{1-e^{-2\pi n}}\sum_{k=1}^{n}e^{-2\pi(k-1)}\int_0^{2\pi}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds\\&=\frac{1}{1-e^{-2\pi n}}\frac{1-e^{-2\pi n}}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds\\&=\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds.\end{aligned}$$

得到的结果相同。

(2) 在 (1) 中令 $n\to\infty$，可以得到 (容易验证下面的反常积分存在)

$$C=\int_0^{\infty}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds.$$

于是解也可以被表达为

$$y(x)=e^{x+\frac{\sin 2x}{2}}\int_x^{\infty}e^{-s-\frac{\sin 2s}{2}}\sin sds.$$

(3) 两个周期函数之和未必是周期函数 (当然，当它们周期相同时显然是对的)。事实上可以证明：对于周期分别为 T_1 和 T_2 的连续函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，如果 $\frac{T_1}{T_2}\notin\mathbb{Q}$ 并且它们不具有相同的正周期，那么 f_1+f_2 一定不是非常值的周期函数。

<u>上述结论的证明：</u> 由于 $\frac{T_1}{T_2}\notin\mathbb{Q}$，存在一列整数对 $\{(m_k,n_k)\}_{k\geqslant 1}\subset\mathbb{Z}^2$，使得 (想想怎么证？)

$$\lim_{k\to\infty}m_kT_1+n_kT_2=0.$$

假设 $f_1(x)+f_2(x)$ 以 $T>0$ 为周期，那么就有

$$f_1(x+T)-f_1(x)=f_2(x)-f_2(x+T),\quad x\in\mathbb{R}.$$

我们定义 $\phi(x) = f_1(x+T) - f(x) = f_2(x) - f_2(x+T)$，那么显然 $\phi(x)$ 同时以 T_1 和 T_2 为周期，从而也以 $m_kT_1 + n_kT_2$ 为周期。令 $k \to \infty$ 就得到了 $\phi(x)$ 为常数。另一方面因为 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是周期函数，因此是有界的，于是 $\phi(x)$ 必须恒为 0，即 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 也以 $T > 0$ 为周期，这与假设相矛盾。

题目 P33 5 假设连续函数 $f(t)$ 满足 $|f(t)| \leqslant M,\ t \in \mathbb{R}$。证明：微分方程

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

在 $-\infty < t < +\infty$ 上只有一个有界解；进一步，如果 $f(t)$ 是周期函数，那么这个有界解也是周期的。

解答 有界解一定是 (可以) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的。对于 $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 满足方程

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{d}{dt}\left(e^t x(t)\right) = e^t x(t) \\
&\iff x(t) = e^{-t}\left(C + \int_0^t e^s f(s)ds\right), \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$x(t)$ 有界的必要条件是：当 $t \to -\infty$ 时 (容易验证下面的反常积分存在)，

$$\lim_{t\to-\infty}\int_0^t e^s f(s)ds = -\int_{-\infty}^0 e^s f(s)ds = -C$$

即

$$C = \int_{-\infty}^0 e^s f(s)ds.$$

实际上这个条件也是充分的：

$$|x(t)| \leqslant e^{-t}\int_{-\infty}^t e^s M ds = M.$$

故唯一的有界解就是

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^t e^s f(s)ds.$$

如果 $f(t)$ 以 ω 为周期，那么

$$x(t+\omega) = e^{-t-\omega}\int_{-\infty}^{t+\omega} e^s f(s)ds = e^{-t-\omega}\int_{-\infty}^{t} e^{s+\omega} f(s)ds = x(t).$$

即上述有界解也以 ω 为周期。

另外一种不解方程的做法 是设 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 是两个有界解，则 $x_1(t) - x_2(t)$ 满足

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (x_1 - x_2) = 0.$$

这个一阶线性方程的解要么恒为零，要么无界，于是 $x_1(t) = x_2(t)$，即有界解唯一。

当 $f(t)$ 以 ω 为周期时，$x(t+\omega)$ 也是解，于是 $x(t+\omega) - x(t)$ 也满足

$$\frac{d(x(t+\omega) - x(t))}{dt} + (x(t+\omega) - x(t)) = 0.$$

同样的论证表明 $x(t+\omega) = x(t)$，即上述有界解 $x(t)$ 也以 ω 为周期。 □

题目 P96 2 求初值问题

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1, \quad y(0) = 0$$

的 Picard 序列，并由此取极限求解。

解答 写出 Picard 序列，

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 0,\\
y_1(x) &= \int_0^x s+0+1\ ds = x+\frac{x^2}{2},\\
y_2(x) &= \int_0^x s+\left(s+\frac{s^2}{2}\right)+1\ ds = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{6}\right),\\
y_3(x) &= \int_0^x s+\left(s+\frac{s^2}{2}\right)+\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6}\right)+1\ ds = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right),\\
y_{n+1}(x) &= \int_0^x s+y_n(s)+1\ ds.
\end{aligned}
$$

于是我们可以归纳证明

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= \left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)+\cdots+\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\\
&= 2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)-2-x+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

对于任意的紧区间 $[-M,M]\subset\mathbb{R}$, 上式第一项一致收敛到 $2e^x$, 最后一项一致收敛到 0, 即 $\{y_n\}_{n\geqslant 1}\subset C(\mathbb{R})$ 紧一致收敛到 $y(x)=2e^x-x-2$。在 Picard 序列的定义式中取极限便可以验证 $y(x)$ 是方程在 $[-M,M]$ 上的解，这里 $M>0$ 是任意的，于是 $y(x)$ 便是原方程在 $\mathbb{R}$ 上的解。 □

注记 你能够直接用 Picard 定理的结论来说明 $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ 紧一致收敛到方程的解吗?

题目 P96 3 在定理 3.1 中，将函数 $f(x,y)$ 的条件用下面的条件替代:

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y)|\leqslant k(x)(1+|y|),\\
&|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant k(x)|y_1-y_2|,
\end{aligned}
$$

其中 $k(x)$ 是可积函数。假设 $f(x,y)$ 是连续函数。证明：存在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha$，使得 Picard 序列一致收敛到 Cauchy 问题 (3.1)，(3.2) 的解。

解答 区间的选取首先要使得 Picard 序列有定义。沿用定理 3.1 中的记号，首先选取 α 使得

$$
\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s)\ ds < \frac{b}{1+|y_0|+b}.
$$

下面我们来证明：区间 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上的 Picard 序列一定落在矩形区域当中。首先对于 $y_0(x)=y_0$ 这是显然的。假设 y_{n-1} 在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上始终满足 $|y_{n-1}(x)-y_0|\leqslant b$，那么

$$
|y_n(x)-y_0|\leqslant \int_{x_0}^x |f(s,y_{n-1}(s))|\ ds \leqslant \int_{x_0}^x k(s)(1+|y_0|+b)\ ds\leqslant b,
$$

于是在区间 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上，Picard 序列是良好定义的。

下面我们来证明 Picard 序列的一致收敛性。

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))|\ ds \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(s)|y_n(s)-y_{n-1}(s)|\ ds \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(s)\int_{x_0}^{s} k(t)|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)|\ dtds \\
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} k(s_1)\int_{x_0}^{s_1} k(s_2)\cdots\int_{x_0}^{s_{n-1}} k(s_n)|y_1(s_n)-y_0|\ ds_n\cdots ds_2ds_1 \\
&\leqslant \frac{b}{n!}\left(\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s)\ ds\right)^n.
\end{aligned}
$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|y_{n+1}-y_n\|_{L^\infty([x_0,x_0+\alpha])}<\infty,$$

从而根据 $\left(C([x_0,x_0+\alpha]),\|\cdot\|_{L^\infty([x_0,x_0+\alpha])}\right)$ 的完备性，$\{y_n\}_{n\geqslant 0}$ 一致收敛，且极限是初值问题的解 (利用 $f(x,y)$ 在紧集上的一致连续性)。 □

注记 (0) 题目中的“可积”指的是 Lebesgue 可积，而不是 Riemann 可积，从而 $k(x)$ 不必 (在任意小区间内) 有界。Lebesgue 可积的定义是 $\int_{\mathbb{R}}|k(x)|\ ds<\infty$，事实上我们可以证明 (利用 Borel-Cantelli 引理)Lebesgue 可积函数在小区间上的积分可以充分小，即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$，我们有 $\int_{x_0}^{x_0+\delta}|k(x)|\ dx<\varepsilon$。Lebesgue 积分理论是一套与 Riemann 积分理论平行的理论，在这套理论下可以做积分操作的函数类更广，积分与极限之间的关系更和谐，并且保留了我们对积分的一些基本要求，比如积分算子 $\int$ 仍然是一个连续线性泛函。此外，Lebesgue 积分理论相对 Riemann 积分理论的明显优势是在高维空间 $\mathbb{R}^n$ 做积分时更加自由，而 Riemann 积分会被“集合的几何”所束缚住。此外，Lebesgue 积分可以容易地推广到一般的抽象测度空间 (比如概率空间等等) 以及在任意 Banach 空间中取值的测度 (比如谱投影等等)，因此 Lebesgue 积分理论也被称作抽象积分理论。值得一提的是，这种对积分的推广并不是毫无意义的抽象游戏，利用积分的思想 (来自于 Newton 时期对函数图像下方面积的计算)，我们可以解决更多的问题，比如我们可以在 Lebesgue 积分框架下把级数求和化归为一种积分，把某种分布频率的信息化为一种积分 (一个例子是 Weyl 等分布定理，大家可以参考柳斌书的 8.4 节)，从而可以将积分里发展的技术 (比如分部积分、微积分基本定理) 迁移到其他的问题上。

(1) 如果你不想始终担心 y_n 是否会跑出 $f(x,y)$ 的定义区域，也就是定理 3.1 中的矩形区域，可以将 f 延拓成 $[x_0-a,x_0+a]\times\mathbb{R}$ 上的连续函数，

$$\bar{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y_0+b), & y>b \\ f(x,y), & y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b \\ f(x,y_0-b), & y<y_0-b \end{cases}$$

这里延拓后的 $\bar{f}$ 仍然满足 Lipschitz 或者是本题中的第二个条件 (第一个条件在差一个常数倍下也满足)。这样我们就可以直接定义 Picard 序列，然后再去验证 Picard 序列是落在原来的矩形区域之中的。

(2) 由于这里题目中并没有要求区间的长度，我们有无穷多种放缩的方式。比如要求 $\int_{x_0}^{x_0+\alpha}k(s)\,ds<1$，然后把所有的 $|y_n(s)-y_{n-1}(s)|$ 放缩成 $\left(\int_{x_0}^{x_0+\alpha}k(s)\ ds\right)^n(1+|y_0|)$，然后利用等比级数求和来完成一致收敛性的证明。

(3) 题目中的第一个条件是可以去掉的，这时我们直接用 L^∞ 范数做放缩

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s)|y_n(s)-y_{n-1}(s)|\ ds \leqslant \left(\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s)\ ds\right)\|y_n-y_{n-1}\|_{L^\infty([x_0,x_0+\alpha])},$$

选取 α 使得 $\int_{x_0}^{x_0+\alpha} k(s)\ ds<1$ 即可。而且我们在上一次习题课中已经看到，这里区间长度的选取不是本质的，因为我们可以换一个“压缩范数”来弥补区间长度的不足。

(4) 如果 $k(s)$ 不可积怎么办？可以参考下面关于 Rosenblatt 条件的例题。

3 习题课

下面的 7 道例题中，1-3 题是基础题目的补充 (1-2 题是作业题)，大家只需要掌握这些题目。第 4 题我们讨论椭圆方程的径向解，本质上是常微分方程问题，需要的主要技术来自数学分析，在后半学期学习 Laplace 方程的基本解时我们也会做类似的计算。第 5-6 题是常微分方程的有趣应用举例，其中第 6 题关于反函数定理的证明是标准的。第 7 题探究了常微分方程的解集结构，其中三小问的计算是基本的，注记里的内容仅供感兴趣的同学阅读。

例题 1 *Rosenblatt* **条件** *(P110 3)*

考虑初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(0)=y_0,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$-\infty<y<+\infty$ 上连续，且满足

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqslant \frac{q}{x}|y-z|,$$

这里 q $(0<q<1)$ 为常数。证明：该初值问题的解在区间 $[0,a]$ 上是存在且唯一的。

解答 首先我们证明唯一性：假设存在两个 $[0,a]$ 上的解 $y_1(x)$，$y_2(x)\in C^1([0,a])$，我们要证明 $y_1(x)=y_2(x)$，$x\in[0,a]$。

假设存在 $x_0\in(0,a)$, $y_1(x_0)\neq y_2(x_0)$, 那么我们找到最后一次相遇的地方 $x_1=\sup\{x\in[0,x_0]\mid y_1(x)=y_2(x)\}$. 根据 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 的连续性，$0\leqslant x_1<x_0$。$x_1>0$ 的情况很容易，因为 $f(x,y)$ 在远离 $x=0$ 的地方已经是 Lipschitz 了，可以直接用 Picard 定理的唯一性部分导出矛盾，细节留给大家完成。下面我们考虑 $x_1=0$ 的情形，也就是对任意的 $0<x<x_0$，$y_1(x)\neq y_2(x)$。

这里关键的观察是 $y_1(s)-y_2(s)$ 在 $[0,a]$ 上是 C^1 的且在 0 处为 0，于是 $\frac{1}{s}(y_1(s)-y_2(s))$ 也是 $[0,a]$ 上的连续函数。于是根据方程，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x} &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|\ ds\\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x q\frac{|y_1(s)-y_2(s)|}{s}\ ds\\ &\leqslant \frac{q}{x}\int_0^x \sup_{s\in[0,a]}\frac{|y_1(s)-y_2(s)|}{s}\ ds\\ &= q\sup_{s\in[0,a]}\frac{|y_1(s)-y_2(s)|}{s}\end{aligned}$$

再在左边取 sup，就得到了

$$\sup_{x\in[0,a]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x}\leqslant q\sup_{x\in[0,a]}\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x},$$

由于 $q<1$，这表明 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上只能恒等！

有许多同学希望利用 Gronwall 不等式直接证明解的唯一性，也就是

$$|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant\int_0^x\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|\ ds,\ x\in[0,a]$$

然后直接用 Gronwall 不等式，得到

$$|y_1(x)-y_2(x)|\leqslant 0\cdot e^{\int_0^x\frac{1}{s}\ ds}=0.$$

上面红色等号成立的原因是什么？(同学们可以尝试，即使你在 $\delta>0$ 处截断去估计，依旧证不出来为 0)。不过，其实这里等于 0 的结论是对的，但需要重新证明！我们令

$$F(x)=\int_0^x\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|\ ds,$$

于是得到微分不等式

$$F'(x)\leqslant\frac{q}{x}F(x),\ x\in(0,a]\iff\big(x^{-q}F(x)\big)'\leqslant 0,\ x\in(0,a].$$

于是

$$x^{-q}F(x)\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-q}\int_0^\varepsilon\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|\ ds=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{1-q}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\frac{q}{s}|y_1(s)-y_2(s)|\ ds\right)=0.$$

注意最后一个等号用到了大括号里面是有界的并且 $q<1$！这样就说明了 $F(x)=0,\ x\in[0,a]$，从而 $y_1(x)=y_2(x),\ x\in[0,a]$。

存在性的证明也有很多，首先上面的计算实际上表明了

$$T:B\to B,\quad y\mapsto(Ty)(x)=\int_0^x f(s,y(s))\ ds$$

在范数 $\|y\|=\sup\limits_{x\in[0,a]}|\frac{y(x)}{x}|$ 下是压缩映射 (压缩系数是 $q<1$)，其中 $B=\{y\in C([0,a])\mid\|y\|<\infty\}$，这是一个 Banach 空间 (请验证这一点！)。于是当 $y_0=0$ 时，利用 Banach 不动点定理就得到了存在唯一性。这里要求 $y_0=0$ 是因为 B 中的函数一定满足 $y(0)=0$，对于一般的初值 $y_0\in\mathbb{R}$，把 $f(x,y)$ 替换成 $f(x,y_0+y)$，再把得到的解 $y(x)\in B$ 加上 y_0 就是原初值问题的解。

也可以使用解的延伸定理证明存在性。根据延伸定理 (实则糅合了 Peano 定理)，存在区间 $I\subset[0,a]$ 上的解 $y(x)$，满足 $y(x)$ 的图像

$$\Gamma(y)=\{(x,y)\in D=[0,a]\times\mathbb{R}\mid y=y(x)\}$$

不落在 D 的任意紧集之中。下面我们证明这个解的定义区间一定是全区间 $[0,a]$。

如若不然，假设这个解的定义区间是 $I=[0,x_0)\subset[0,a]$(为什么我们不考虑 I 是闭区间的情况?)，我们要说明 $y(x)$ 在这个区间上是有界的，从而 $\Gamma(y)$ 落在 D 的一个紧集之中，与 $y(x)$ 的选取矛盾。一般情况下我们要证明方程的解是有界/无界的，就去考虑比较：找一个简单方程的解，这个解是容易判断有界/无界的，再去研究原方程的解与这个简单的解的距离关系 (用 Gronwall 不等式)/大小关系 (用比较定理)，从而得到原方程的解是有界/无界的。这里我们考虑如下简单的方程(请注意，这里展示的方法远不是最快的，但比较有启发性)

$$y'=f(x,y_0),\quad y(0)=y_0.$$

这个方程的简单之处在于它存在全区间 $[0,a]$ 上的有界解 (因为 f 限制在线段 $[0,a]\times\{y_0\}$ 上是有界的)，我们记这个解为 $\bar{y}(x)$。我们考虑原方程的解 $y(x)$ 与这个简单方程的解 $\bar{y}(x)$ 的距离比较:

$$\begin{aligned}|y(x)-\bar{y}(x)| &\leqslant |y(\delta)-\bar{y}(\delta)|+\int_\delta^x |f(s,y(s))-f(s,y_0(s))|\ ds\\ &\leqslant |y(\delta)-\bar{y}(\delta)|+\int_\delta^x |f(s,y_0)-f(s,\bar{y}(s))|\ ds+\int_\delta^x |f(s,y(s))-f(s,\bar{y}(s))|\ ds\\ &\leqslant |y(\delta)-\bar{y}(\delta)|+\int_0^a \frac{q}{\delta}|y_0-\bar{y}(s)|\ ds+\int_0^x \frac{q}{\delta}|y(s)-\bar{y}(s)|\ ds\end{aligned}$$

其中 $0<\delta<x_0$ 是一个固定的数使得当 $x<\delta$ 时 $|y(x)-\bar{y}(x)|$ 是有界的 (注意上面的式子是在 $x\geqslant\delta$ 时成立的)。利用 Gronwall 不等式，便得到了

$$|y(x)-\bar{y}(x)|\leqslant\left(|y(\delta)-\bar{y}(\delta)|+\int_0^a \frac{q}{\delta}|\bar{y}(s)-y_0|\ ds\right)e^{\frac{q}{\delta}x},\ x\in[0,x_0)$$

从而就证明了 $y(x)$ 在 $[0,x_0)$ 是有界的。 □

注记 (1) 如果 $y(x)$ 的存在区间是 $[0,a)$ 怎么办? 上面的证明有什么问题?

(2) 使用 Picard 迭代也可以证明 $[0,a]$ 上解的存在性，请大家自行尝试。

例题 2 解从开区间到闭区间的延伸 *(P110 4)*

假设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $0\leqslant x\leqslant a$, $-\infty<y<+\infty$ 上连续。记 $\phi(x,\xi)$ 是微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $\phi(0,\xi)=\xi$ 的解。进一步，假设 $\phi(x,\xi)$ 在区间 $[0,\bar{x})$ 上存在，$\bar{x}<a$。证明下列三个结论之一成立:

(1) $\lim\limits_{x\to\bar{x}-0}\phi(x,\xi)$ 有限，此时解 $y=\phi(x,\xi)$ 可以延伸至 $x=\bar{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\bar{x}-0}\phi(x,\xi)=+\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to\bar{x}-0}\phi(x,\xi)=-\infty$。

解答 我们先考虑 ϕ 在 $[0,\bar{x})$ 上有界的情形，假设它的图像落在 $[0,\bar{x}]\times[-b,b]$ 中，其中 b 是一个很大的正数，那么 $f(x,y)$ 在上面是有界的，记

$$M=\sup_{(x,y)\in[0,\bar{x}]\times[-b,b]}|f(x,y)|.$$

于是，ϕ 在 $[0,\bar{x})$ 上是一致连续 (Lipschitz 连续) 的:

$$|\phi(x_1)-\phi(x_2)|\leqslant\int_{x_1}^{x_2} M\ dx=M|x_1-x_2|.$$

于是极限 $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-}\phi(x)$ 存在 (利用 Cauchy 收敛准则)，我们就把这个极限定义为 ϕ 在 $\bar{x}$ 处的值，这样就把 ϕ 延拓到了 $[0,\bar{x}]$ 上。这样得到的延拓自然是连续的，而且还是 C^1 的，因为 $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-}\phi'(x)=\lim\limits_{x\to\bar{x}^-}f(x,\phi(x))=f(\bar{x},\phi(\bar{x}))$ 极限存在 (你应该知道如何从此看出 ϕ 在 $[0,\bar{x}]$ 上是 C^1 的)。

下面我们证明，如果当 $x\to\bar{x}^-$ 时，$\phi(x)$ 既不趋于正无穷、也不趋于负无穷，那么它是有界的。根据我们的假设，存在 $B>0$ 使得 ϕ 的图像会反复进入 $[0,\bar{x}]\times[-B,B]$ 中，仔细来说，对于任意的 $\delta>0$，存在 $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x})$，使得 $\phi(x)\in[-B,B]$。我们记

$$M_{2B}=\sup_{(x,y)\in[0,\bar{x}]\times[-2B,2B]}|f(x,y)|,$$

并且取 $\delta=\frac{B}{M_{2B}}$，我们找到这个 $x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x})$，使得 $\phi(x)\in[-B,B]$。但是对于任意的 $y\in(x,\bar{x})$，$\phi(y)\in[-2B,2B]$ (为什么? 请用反证法/比较定理写清楚)，这就说明 ϕ 是有界的。 □

注记 这道题不需要使用延伸定理。延伸定理的作用是给出了定义在极大 (当方程有局部唯一性的时候实际上是最大) 区间上解的特征，也就是解的图像不会停留在定义域 D 的任意一个紧集之中 (黑话：延伸到边界)。而定义在极大区间上的解的存在性是平凡的，我们用 Zorn 引理构造就可以了 (当方程有局部唯一性的时候不需要 Zorn 引理)。

例题 3 *(2022 年期中考试)*

考虑方程 $\dfrac{dx}{dt} = k(t) - x^2$，其中 $k(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $1 \leqslant k(t) \leqslant 2$。

(a) 证明：若 $x(0) \geqslant 0$，则解在 $[0, +\infty)$ 上存在。

(b) 若 $x_1(0) \geqslant 0$，$x_2(0) \geqslant 0$，证明：

$$\lim_{t \to +\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0.$$

解答 (a) 根据解的延伸定理，存在方程的解 $x(t)$ 满足 $x(0) = 0$，并且它的图像不落在 $\mathbb{R}^2$ 中的任何一个紧集之中。假设 $x(t)$ 的存在区间是 $[0, a)$，其中 $a < +\infty$。我们等下证明：存在 $M > 0$，使得在存在区间 $[0, a)$ 上，$0 \leqslant x(t) \leqslant M$，于是 $x(t)$ 的图像落在了 $[0, a] \times [0, M]$ 之中，而这是一个 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集，矛盾！于是 $x(t)$ 的存在区间是 $[0, +\infty)$。

现在我们证明可以取 $M = \max\{x(0) + 1, 2\}$。如果存在 $t_1 > 0$，使得 $x(t_1) > M$，令

$$t_2 = \inf\{t \in [0, t_1] \mid x(t) \geqslant M\},$$

很明显 $0 < t_2 < t_1$，$x(t_2) = M$，并且当 $t < t_2$ 时，$x(t) \leqslant M$，于是

$$x'(t_2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{x(t_2) - x(t_2 - h)}{h} \geqslant 0,$$

但是根据方程

$$x'(t_2) = k(t_2) - (x(t_2))^2 \leqslant 2 - 4 = -2,$$

这就得到了矛盾！$x(t) \geqslant 0$ 的证明也是类似的，请同学们自行完成。

(b) 由于 $f(t, x) = k(t) - x^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的对 x 偏导数，于是方程的解具有局部唯一性，所以我们不妨假设 $x_1(t) > x_2(t)$，对任意的 $t \geqslant 0$。此时我们观察 $x_1(t) - x_2(t)$ 满足的方程

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) - x_2(t)) = (x_2(t))^2 - (x_1(t))^2 = (x_1(t) + x_2(t))(x_2(t) - x_1(t)).$$

如果 $x_1(t) \to 0$，$t \to +\infty$，那么 $x_2(t)$ 也趋于 0 (因为 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 都是非负的)，命题自然得证；否则，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 (充分大) 的 $t > 0$，有 $x_1(t) + x_2(t) > \varepsilon$，这就得到

$$\frac{d}{dt}(x_1(t) - x_2(t)) \leqslant -\varepsilon(x_1(t) - x_2(t)),$$

这也能说明 $\lim\limits_{t \to +\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0$。 □

例题 4 $\mathbb{R}^n$ **中椭圆方程的径向解**

在这个题目中，我们希望证明 *(*非线性*)* 椭圆方程在 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant R\} \subset \mathbb{R}^n$ 中的径向解是存在唯一的，即存在唯一的径向函数 $u \in C^2(B_R)$ 满足方程

$$\Delta u = f(|x|, u), \quad u(0) = u_0,$$

其中 $f(r, z)$ 是定义在 $[0, R] \times \mathbb{R}$ 上的连续函数，并且对 $z \in \mathbb{R}$ 满足 *Lipschitz* 条件。所谓 u 是径向函数指的是对任意的 $g \in \mathbf{O}(n)$ *(*一般正交群*)*，都有 $u(g \cdot x) = u(x)$。

(1) 证明：对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，存在 $g\in\mathbf{O}(n)$，使得 $g\cdot x=(|x|,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$。

(2) 证明：对于 B_R 上的径向函数 u，存在唯一的 $[0,R]$ 上的函数 y，使得 $u(x)=y(|x|)$，对任意的 $x\in B_R$。

于是我们要寻找的径向解 u 就与一个 $[0,R]$ 上的函数 y 相对应，下面我们还要对应它们的正则性。

(3) 证明：对于 B_R 上 C^2 的径向函数 $u\in C^2(B_R)$，它对应的 $[0,R]$ 上的函数也是 C^2 的，即 $y\in C^2([0,R])$ 且满足 $y'(0)=0$。

(4) 证明：对于 $[0,R]$ 上的函数 $y\in C^2([0,R])$，如果 $y'(0)=0$，那么它对应的径向函数 $u\in C^2(B_R)$。

于是我们要寻找的 C^2 径向解 $u\in C^2(B_R)$ 就与一个 $[0,R]$ 上的 C^2 函数 $y\in C^2([0,R])$ 相对应，下面我们还要对应它们满足的方程。

(5) 证明：对于径向解 $u(x)=y(|x|)$，关于 $u\in C^2(B_R)$ 的椭圆方程

$$\Delta u=f(|x|,u),\quad u(0)=u_0$$

等价于关于 $y\in C^2([0,R])$ 的常微分方程 *(*我们用 r 表示 y 的定义域 $[0,R]$ 上的坐标*)*

$$y''+\frac{n-1}{r}y'=f(r,y),\quad y'(0)=0,\ y(0)=u_0.$$

值得注意的是，这是一个奇异初值问题，也就是在 $r=0$ 处方程本身是没有定义的。

(6) 证明：上面关于 $y\in C^2([0,R])$ 的二阶常微分方程等价于一个关于 $y\in C([0,R])$ 的如下形式的积分方程

$$y(r)=u_0+\int_0^r k(r,s)f(s,y(s))\ ds.$$

其中“核函数”$k(r,s)$ 是一个定义在三角形区域 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant R$ 上的连续函数。

(7) 我们研究如下的 *Volterra* 积分方程。设 $K(r,s,z)$ 是定义在 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant a,\ z\in\mathbb{R}$ 上的连续函数，并且满足关于 $z\in\mathbb{R}$ 的 *Lipschitz* 条件

$$|K(r,s,z_1)-K(r,s,z_2)|\leqslant L|z_1-z_2|.$$

证明：*Volterra* 积分方程

$$y(r)=y_0+\int_0^r K(r,s,y(s))\ ds$$

存在唯一的定义在 $[0,a]$ 上的解 $y\in C([0,a])$。

(8) 验证 *(6)* 中得到的积分方程就是一个 *Volterra* 方程，再利用 *(7)* 的结论，证明 *(6)* 中的积分方程存在唯一的解 $y\in C([0,R])$，进而完成证明。

解答 (1) 这是显然的。(你需要利用一个线性代数的结论：一个模长为 1 的行向量可以被扩充成一个正交矩阵。)

(2) 定义 $y(x)=u(x,0)$，其中 $x\in[0,R]$。根据 (1)，对于任意的 $x\in B_R$，$y(|x|)=u(|x|,0)=u(g\cdot x)=u(x)$。唯一性是显然的。

(3) $y\in C^2([0,R])$ 是显然的。

$$y'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{u(x,0)-u(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{u(-x,0)-u(0)}{-x}=\lim_{x\to0}\frac{u(x,0)-u(0)}{-x}$$

其中最后一个等号处使用了 $u(x,0)=u(-x,0)$。于是 $y'(0)=0$。

(4) 注意到 u 在 B_R 上是 $x \mapsto \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ 与 y 的复合，于是 $u \in C(B_R)$，并且 $u \in C^2(B_R-\{0\})$。下面我们要证明 $u \in C^2(B_R)$。在 $B_R-\{0\}$ 上，我们有 (用 r 表示 $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = y'(r)\frac{x_i}{r}.$$

可见当 $x \to 0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \to 0$ (因为 $y'(0)=0$)。这就表明 $y \in C^1(B_R)$ (为什么？)。类似地，在 $B_R-\{0\}$ 上，我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{y'(r)}{r}\delta_{ij} + \left(y''(r) - \frac{y'(r)}{r}\right)\frac{x_i x_j}{r^2}.$$

可见当 $x \to 0$ 时，$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \to y''(0)\delta_{ij}$ (注意到根据 $y'(0)=0$，我们有 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{y'(r)}{r} = y''(0)$，所以后面那项趋于 0)。这就表明 $y \in C^2(B_R)$ (为什么？)。

(5) 如果 $u \in C^2(B_R)$ 满足椭圆方程，且 $u(x)=y(|x|)=y(r)$，那么

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = y''(r) + \frac{y'(r)}{r}(n-1) = f(r, y(r)),\ r \in (0, R]$$

$y(0)=u(0)=u_0$，$y'(0)=0$ 已经在 (3) 中证过。

反之，如果 $y \in C^2([0,R])$ 满足

$$y'' + \frac{n-1}{r}y' = f(r,y), \quad y'(0)=0,\ y(0)=u_0.$$

那么在 $x \in B_R-\{0\}$ 上有 $\Delta u(x) = f(|x|, u(x))$ (还是上面的计算)。在 $x=0$ 处，我们对上面的计算式取 $x \to 0$ 的极限即得

$$\Delta u(0) = f(0,u_0) = f(0,u(0)).$$

(6) 如果 $y \in C^2([0,R])$ 满足微分方程，那么

$$r^{1-n}\left(r^{n-1}y'(r)\right)' = y''(r) + \frac{n-1}{r}y'(r) = f(r, y(r)).$$

于是积一次分可以得到

$$r^{n-1}y'(r) = \int_0^r s^{n-1} f(s, y(s))\, ds,$$

其中我们利用了 $\lim\limits_{r\to 0} r^{n-1}y'(r) = 0$。再积一次分得到

$$y(r) = u_0 + \int_0^r t^{1-n}\int_0^t s^{n-1} f(s,y(s))\, dsdt,$$

其中我们利用了 $\left|t^{1-n}\int_0^t s^{n-1}f(s,y(s))\right| \leqslant \int_0^t |f(s,y(s))|ds$ 作为 t 的函数是有界的。下面我们交换积分次序，得到

$$y(r) = u_0 + \int_0^r s^{n-1} f(s,y(s)) \int_s^t t^{1-n}\, dtds,$$

可见对应于 $k(r,s) = s^{n-1}\int_s^r t^{1-n}\, dt$ 的 Volterra 积分方程 (请大家自己验证 $k(r,s)$ 是 $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant R$ 上的连续函数)。

反之，如果 $y \in C([0,R])$ 满足积分方程，我们容易得到 $y \in C^2((0,R])$ 以及 $y(0)=u_0$，下面的关键是证明 $y \in C^2([0,R])$ 并且 $y'(0)=0$。首先对积分方程求一次导得到

$$r^{n-1}y'(r) = \int_0^r s^{n-1} f(s,y(s))\, ds,\ r \in (0,R]$$

做换元 $s \mapsto rs$，得到

$$\frac{y'(r)}{r} = \int_0^1 s^{n-1} f(rs, y(rs))\ ds.$$

可见当 $r \to 0$ 时，$y'(r) \to 0$，从而 $y \in C^1([0,R])$，$y'(0) = 0$，而且 $\lim\limits_{r\to 0} \frac{y'(r)}{r} = \frac{f(0,u_0)}{n}$。对积分方程求两次导得到对应的微分方程

$$y''(r) + \frac{y'(r)}{r}(n-1) = f(r, y(r)),\ r \in (0,R]$$

令 $r \to 0$，得到

$$\lim_{r\to 0} y''(r) = \frac{f(0,u_0)}{n},$$

这就证明了 $y \in C^2([0.R])$ 并且 $y''(0) = \dfrac{f(0,u_0)}{n}$。

(7) 在 $C([0,a])$ 上赋予范数

$$\|y\| = \sup_{r\in[0,a]} |y(r)| e^{-2Lr},$$

于是 $(C([0,a]), \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。考虑如下映射

$$T : C([0,a]) \to C([0,a]), \quad y \mapsto (Ty)(r) = y_0 + \int_0^r K(r,s,y(s))\ ds.$$

这是一个压缩映射，因为

$$\begin{aligned}
|(Ty_1)(r) - (Ty_2)(r)| &\leqslant \int_0^r |K(r,s,y_1(s)) - K(r,s,y_2(s))|\ ds \\
&\leqslant \int_0^r L|y_1(s) - y_2(s)| e^{-2Ls} e^{2Ls}\ ds \\
&\leqslant \|y_1 - y_2\| L \int_0^r e^{2Ls}\ ds \\
&\leqslant \|y_1 - y_2\| \frac{e^{2Lr}}{2}.
\end{aligned}$$

于是

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|.$$

利用 Banach 不动点定理，存在唯一的 $y \in C([0,a])$ 使得 $Ty = y$，即

$$y(r) = y_0 + \int_0^r K(r,s,y(s))\ ds.$$

(8) 在 (6) 中得到的积分方程对应于积分核为 $K(r,s,z) = k(r,s)f(s,z)$ 的 Volterra 积分方程。其中 Lipschitz 条件来源于 $f(s,z)$ 对 $z \in \mathbb{R}$ 的 Lipschitz 条件以及 $k(r,s)$ 的有界性。根据 (7)，这个关于 $y \in C([0,r])$ 的积分方程的解是存在唯一的，于是关于 $y \in C^2([0,R])$ 的微分方程的解是存在唯一的，最后关于 $u \in C^2(B_R)$ 的椭圆方程的径向解是存在唯一的。 □

注记 (1) 一般的 Volterra 积分方程能够化为微分方程吗？乍一看来 Volterra 积分方程很不自然，因为积分核 K 以及积分限中都含有自变量 x，不过根据 (6) 中的计算我们知道，这里积分核中的 x 通常来源于将二阶微分方程化为积分方程过程中对二重积分的换序。

(2) 在 (6) 中利用 Picard 迭代也可以得到 Volterra 积分方程解的存在唯一性，请大家自行尝试。

(3) 如果我们去掉 $f(r,z)$ 满足的 Lipschitz 条件，同时要求 $|f(r,z)| \leqslant L(r)(1+|z|)$，其中 $L(r) \in C([0,a])$，那么利用 Peano 定理 (的证明) 我们也能得到 B_R 上径向解的存在性 (要在第 (7) 步中用 Schauder 不动点定理代替 Banach 不动点定理)。

例题 5 利用常微分方程证明恒等式

试证明恒等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}=\frac{\pi^2}{18}.$$

解答 我们把两个数相等视为两个函数在某点处的值相等，进而如果我们能证明这两个函数恒等，那么命题也就得证了。

我们令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}},$$

简单的计算表明右端幂级数的收敛半径是 2，于是 $f(x)$ 是一个 $B(0,2)$ 上定义的光滑函数。我们下面观察 $f(x)$ 满足的微分方程。

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n-1)x^{2n-2}}{n^2\frac{(2n)!}{n!n!}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2x^{2m}}{m^2\binom{2m}{m}}.$$

上面我们故意没有消去 m^2 是因为如果没有分子上的 m^2 那么右端就是 $1+f(x)$ 了！不过现在还差一点。我们观察到 $x\frac{d}{dx}x^{2m}=2mx^{2m}$，于是

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2x^{2m}=4m^2x^{2m},$$

从而我们得到了 $f(x)$ 满足的微分方程

$$f''(x)=1+\frac{1}{4}\left(x\frac{d}{dx}\right)^2f(x)=1+\frac{1}{4}x^2f''(x)+\frac{1}{4}xf'(x),$$

整理得

$$f''(x)+\frac{x}{x^2-4}f'(x)=\frac{4}{4-x^2}.$$

这时一个关于 $f'(x)$ 的一阶线性方程，此外初值条件是 $f'(0)=0$，$f(0)=0$。

直接求解这个方程，得到

$$f(x)=2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2,$$

代入 $x=1$ 即可。 □

注记 (1) 我们也可以把上面的所有函数视为 $\mathbb{C}$ 上的函数，我们带入 $x=\sqrt{-1}$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\binom{2n}{n}}=2\left(\arcsin\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^2=\cdots.$$

你觉得这里到复数的推广有什么问题?

(2) 初值问题

$$f''(x)+\frac{x}{x^2-4}f'(x)=\frac{4}{4-x^2},\quad f'(0)=0,\ f(0)=0$$

的解唯一吗? 我们如何保证解出来的 $f(x)$ 就是我们想要的 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}$? (事实上这个问题也许从复变函数的观点看会更容易回答。关于复变函数的常微分方程理论跟我们课堂上学习的基本是平行的，比如我们依然可以用相同的手段证明 Picard 存在唯一性定理，只不过要在全纯函数空间 $H(\Omega)$ 上操作。等大家学习了复分析之后可以再来思考这个问题。)

(3) 我们也可以尝试用类似的方法证明 Bassel 恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

该如何定义函数 $f(x)$? 计算过程中遇到什么问题?

例题 6 利用常微分方程证明反函数定理

$\mathbb{R}^n$ 中的反函数定理的陈述如下: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空开集，$f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 Ω 上的 C^1 映射。如果存在 $x_0\in\Omega$ 使得 $df(x_0)$*(*f 在 x_0 处的 *Jacobi* 矩阵*)* 可逆，那么存在 x_0 的开邻域 $U\subset\Omega$，$f(x_0)$ 的开邻域 $V\subset\mathbb{R}^n$，使得 $f|_U:U\to V$ 是 C^1 同胚。

本题中我们希望使用常微分方程的一般理论 *(*初值问题解的存在性、唯一性、解对初值及参数的可微依赖性等*)* 来给出反函数定理的证明。

(1) 证明: f 在 x_0 的某个邻域内是单射。

(2) 我们将映射 f 在 x_0 处局部写成 *(*为了简化记号，我们就认为这个局部是 Ω*)*

$$f(x)=y_0+df(x_0)(x-x_0)+r(x),\ x\in\Omega,$$

其中我们记 $f(x_0)=y_0$。证明: $r:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 的映射，$r(x_0)=0$，并且在 $x\in\Omega$ 处的微分为

$$dr(x)=df(x)-df(x_0),$$

从而在 x_0 的附近，$dr(x)$ 非常小。

(3) 证明: $r(x)=o(x-x_0)$，即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 x_0 的邻域，使得 $r(x)$ 在这个邻域上有

$$|r(x)|<\varepsilon|x-x_0|.$$

(4) 我们现在考虑一族函数 $\{f_t:\Omega\to\mathbb{R}^n\}_{t\in[0,1]}$,

$$f_t(x)=f(x_0)+df(x_0)(x-x_0)+t\cdot r(x),\ x\in\Omega.$$

假设存在 x_0 的开邻域 $U\subset\Omega$，$f(x_0)$ 的开邻域 $V\subset\mathbb{R}^n$，以及一族 C^1 的映射 $\{g_t:V\to U\}_{t\in[0,1]}$ 使得 $f_t(g_t(y))=y$ 对任意的 $y\in V$*(*也就是说 g_t 是相应 f_t 的反函数*)*。现在固定一个 $y\in V$，并且记 $g_t(y)=x(t)$，证明: $x(t)$ 作为 $[0,1]$ 上的函数满足

$$y=y_0+df(x_0)(x(t)-x_0)+t\cdot r(x(t)),\ t\in[0,1].$$

(5) 如果我们进一步假设 *(4)* 中的 $x(t)$ 是 C^1 的，证明 $x(t)$ 满足方程

$$(df(x_0)+t\cdot dr(x(t)))\cdot\frac{dx}{dt}=-r(x(t)),\quad x(0)=x_0+(df(x_0))^{-1}\cdot(y-y_0).$$

根据 *(2)* 中的想法，$dr(x(t))$ 应当是很小的矩阵，而 $df(x_0)$ 是可逆的，于是 $(df(x_0)+t\cdot dr(x(t)))$ 也应该是可逆的，从而上面的方程应该等价于

$$\frac{dx}{dt}=-\left(df(x_0)+t\cdot dr(x(t))\right)^{-1}\cdot r(x(t)),\quad x(0)=x_0+(df(x_0))^{-1}\cdot(y-y_0).$$

至此，我们从假设存在反函数 *(*族*)* 出发，得到了不同 $t\in[0,1]$ 时 f_t 对应的反函数 g_t 在一个固定的 $y\in V$ 处取值 $g_t(y)=x(t)$ 应该满足的方程。下面我们希望证明这个方程的解的确在 $[0,1]$ 上是存在的，从而得到要找的反函数。我们令

$$F(t,x)=-\left(df(x_0)+t\cdot dr(x)\right)^{-1}\cdot r(x),\quad (t,x)\in[0,1]\times U,$$

其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是 x_0 的一个开邻域，使得对任意的 $t \in [0,1]$，任意的 $x \in U$，$(df(x_0) + t \cdot dr(x))$ 是可逆的。

(6) 证明：存在 $y_0 = f(x_0)$ 的邻域 V 使得上述初值问题对于任意的 $y \in V$ 存在 $[0,1]$ 上的解 $x(t) \in C^1([0,1])$。于是通过考虑 $y \mapsto x(1)$，我们便得到了 $f_1 = f$ 的一个局部上的反函数。*(*提示：利用 *(3)* 中对 $r(x)$ 的估计，通过缩小 U 和 V 使得 *Peano* 定理给出的存在区间能够包含 $[0,1]$。*)*

(7) 利用常微分方程解对初值的可微依赖性定理证明上面得到的反函数是 C^1 的，于是便完成了反函数定理的证明。

解答 (1) 通过考虑 $(df(x_0))^{-1}f(x)$，我们可以假设 $df(x_0) = \mathrm{Id}$ (单位矩阵)。由于 f 是 C^1 的，存在 $\delta > 0$ 使得对于任意的 $x \in B(x_0,\delta)$，$\|df(x) - \mathrm{Id}\| \leqslant \frac{1}{2}$。于是对于任意的 $x_1, x_2 \in B(x_0,\delta)$，我们有

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)| &= \left| \int_0^1 (df((1-t)x_1 + tx_2) - \mathrm{Id})(x_2 - x_1)\ dt \right| \\
&\leqslant \int_0^1 \|df((1-t)x_1 + tx_2) - \mathrm{Id}\| |x_2 - x_1|\ dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}|x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

另一方面

$$|f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)| \geqslant |x_2 - x_1| - |f(x_1) - f(x_2)|,$$

于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

这就证明了 f 在 $B(x_0,\delta)$ 上是单射。

(2) 这是显然的。

(3) 根据 (2)，我们有

$$|r(x)| = \left| \int_0^1 dr((1-t)x_0 + tx)(x - x_0)\ dt \right| \leqslant \int_0^1 \|dr((1-t)x_0 + tx)\| |x - x_0|\ dt,$$

在 x_0 的附近 $\|dr((1-t)x_0 + tx)\|$ 可以任意小。

(4) 这是显然的。

(5) 在 (4) 中得到的式子两边对 t 求导即可。

(6) 总结一下，现在我们要研究初值问题

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 + (df(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0)$$

我们要证明这个初值问题存在 $[0,1]$ 上的解。我们选取 V 比较小使得对于任意的 $y \in V$，

$$|x(0) - x_0| = |x_0 + (df(x_0))^{-1} \cdot (y - y_0)| \leqslant \frac{\delta}{2},$$

其中 $\delta > 0$ 是一个待定的常数，此外根据 (1)，我们可以假设 f 在 $B(x_0,\delta)$ 上是单射。我们在矩形 $[0,1] \times \overline{B(x_0,\delta)}$ 上应用 Peano 定理，得到存在 $[0, \min\{\frac{\delta}{2M}, 1\}]$ 上的解，其中

$$M = \sup_{(t,x) \in [0,1] \times \overline{B(x_0,\delta)}} |F(t,x)|.$$

根据 (3) 中的结果，当 δ 比较小时，可以使得对于任意的 $(t,x) \in [0,1] \times \overline{B(x_0,\delta)}$ 有

$$\|df(x_0) + t \cdot dr(x)\| \leqslant \frac{\|df(x_0)\|}{2},$$

并且

$$|F(t,x)| = |\,(df(x_0) + t \cdot dr(x))^{-1} \cdot r(x)| \leqslant \frac{2|r(x)|}{\|df(x_0)\|} < \frac{\delta}{2}.$$

于是

$$\frac{\delta}{2M} > 1,$$

也就得到了在 $[0,1]$ 上解的存在性，并且对任意的 $y \in V$，所得到的解 $x(t)$ 在 $t=1$ 处的值 $x(1) \in B(x_0,\delta)$。我们最后选取 $U' = B(x_0,\delta) \cap f^{-1}(V)$。

至此我们已经构造了 $g_1 : V \to U'$ 满足 $f(g_1(y)) = y$，对任意的 $y \in V$。再结合 f 在 U' 上是单射，这就表明 g_1 是 f 的在 U' 上的反函数。

(7) 已经没有更多要说的了。 □

注记 总结一下，这里的核心想法是通过构造一族映射 $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ 来将原始的 $f = f_1$ 与简单的 f_0 (它是线性、可逆的！) 联系起来，而且这种联系是“连续的”，进而使用常微分方程的理论将 $t=0$ 时的结果“延伸到” $t=1$ 时的结果 (对应于以 $t=0$ 时为初值，定义在 $[0,1]$ 区间上的解)。这个想法在偏微分方程中也有重要应用，之后有机会可以再谈。

例题 7 常微分方程的解集结构

在这个问题中，我们希望探究一般的常微分方程的解集结构。所谓解集的“结构”指的是它作为集合以外附加的东西，比如线性空间结构、拓扑结构、光滑结构等。

(1) 求解方程

$$y''' = 0,$$

证明它的解集等同于 *3* 维实线性空间 $\mathbb{R}^3$。

(2) 求解方程

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1,$$

证明它的解集等同于圆圈 $\mathbf{S}^1$。

(3) 求解方程

$$y'' + 3y'y + y^3 = 0,$$

证明它的解集等同于 *(*微分同胚*)* 二维实射影空间 $\mathbb{RP}^2$。*(*提示：做如下的预设[1]，$y(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$。为什么这个预设是合理的？*)*

解答 (1) 显然方程的解集是

$$\{P(x) = a + bx + cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\},$$

即所有次数不超过 2 的实系数多项式，这显然同构于 $\mathbb{R}^3$。

(2) 这个方程的解为

$$y(x) = \sin(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

可见当 $C_1 - C_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ 时，对应同一个解，于是方程的解集是 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbf{S}^1$。

(3) 令 $y(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$，带入方程，利用 Mathematica 计算得到 (请同学们动手计算一下)

$$y'' + 3y'y + y^3 = 0 \iff \frac{P'''(x)}{P(x)} = 0 \iff P'''(x) = 0.$$

[1]这里的“预设”对应于英文文献中的 ansatz。它的大意是当我们无法给出问题的全部答案时，我们先考虑一定形式的特殊解 (比如幂级数解法、分离变量法等)，而且幸运的是，很多情况下这些特殊解实际上给出了问题全部的解。

根据 (1)，$P(x)=a+bx+cx^2$，$a,b,c\in\mathbb{R}$ 不全为 0，于是方程的解为

$$y(x)=\frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}.$$

由于 a,b,c 成比例放缩不改变解，所以实际上方程的解定义在 $\mathbb{R}^3-\{0\}/\sim$ 上，其中

$$(a_1,b_1,c_1)\sim(a_2,b_2,c_2)\iff\exists\lambda\neq 0,\ (a_1,b_1,c_1)=\lambda(a_2,b_2,c_2)$$

这就是 $\mathbb{RP}^2$。

这个预设是合理的，因为我们可以从 $y(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$ 中反解出 $P(x)$ (一阶线性方程)。 □

注记 (1) 我们简要说明一下上述方程是如何构造出来的。我们从 $y^{(n)}=0$ 出发，这个方程的解空间是标准的 $\mathbb{R}^n$，也就是不超过 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个独立的系数。如果我们希望方程的解在系数成比例放大或缩小时保持不变，也就是定义在 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 上，最自然的方式便是考虑使 $y(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$ 作为方程的解，其中 $P(x)$ 就是 $y^{(n)}=0$ 的解。从这里反解出来 $y(x)$ 并带入原来 $P(x)$ 满足的方程便可以得到一个解集是 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 的方程 (同学们可以试一下 (3) 中的方程就是 $n=3$ 时这样构造的结果，$n=1,2$ 时太平凡，$n>3$ 时又难以想象，所以我也找不到其他更好的例子)。更一般的，$\mathbb{RP}^{n-1}$ 可以视为 $\mathbb{R}^\times$ 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上得到的商空间 (对应解的系数成比例放缩保持解不变)，那么我们也可以尝试其他的群作用在 $\mathbb{R}^n$ 上得到的商空间，比如平移、旋转等等，不过一般是很难和方程的解对应起来的 (你可以想象什么样的解是在系数的平移/正交变换下不变的？)。

(2) 之前有同学提问为什么书上关于“通解”的定义是

$$\det\left(\frac{\partial(y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x))}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\right)\neq 0,\ x\in I$$

其中 $I\subset\mathbb{R}$ 是方程解的定义区间。从上面的例子可以看出，我们一般可以把一个 n 阶常微分方程的解集想象成一个 n 维的 C^1-流形 M，我们姑且称作是“解流形”。M 上通常有一族 (用 I 作为指标集) 天然的 (整体) 坐标卡，我们就叫做“取值坐标卡” $y\mapsto(y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x))$。而我们的通解 $(C_1,C_2,\cdots,C_n)\mapsto y\in M$ 也是一些坐标卡，我们就叫做“通解坐标卡”(这些坐标卡通常不能单独覆盖整个解流形，也就是一个通解一般给不出方程的所有解)。不难发现，上面通解定义中的条件正是通解坐标卡与那些取值坐标卡之间的转移映射是 (局部)C^1 同胚的条件 (反函数定理)，从而保证了这些坐标卡之间是相容的，它们共同决定了解流形 M 上的一个微分结构。这就给出了一个关于通解定义的几何解释。(当然还有更朴素的解释，也就是可以把 $C_1,C_1,\cdots,C_n$ 用 $y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)$ 解出来，可以参考书上的例 1.4，例 1.5，例 1.6。)

祝福同学们国庆快乐！

祝福祖国繁荣昌盛！