2022 秋季学期微分方程 I 期中考试

徐诩绫目高等研究所 (转载)

日期：2022 年 11 月 17 日

只写答案未写过程，不给分。第 1-6 题为选做题，从 6 道题中自选 5 道作答，若全写取分数最高的 5 道，7-11 题为必做题。

1、（15 分）求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3y^3 - xy$ 的通解。

2、（15 分）求解微分方程 $y = px\ln x + (xp)^2$，其中 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

3、（15 分）求线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} y$$

的通解。

4、（15 分）求微分方程 $y'' + y = 2\sin x$ 的通解。

5、（15 分）已知 e^x 是

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0$$

的一个解，利用常数变易法求微分方程

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1.$$

6、（15 分）用（广义）幂级数方法求解方程

$$2xy'' + y' + xy = 0.$$

7、（15 分）通过构造 Lyapunov 函数讨论方程

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

的零解的稳定性。

8、（15 分）考虑自治系统

$$\begin{cases} x' = x - x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

(a) 不求解方程，画出该系统在平衡点附近的相图。（要有计算过程）

(b) 结合 nullcline 画出整个相平面上的相图。

9、（15 分）假设 $f(x,y)$ 是连续函数，且满足 $|f(x,y)| \le k(x)(1+|y|)$ 及 $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le k(x)|y_1 - y_2|$，其中 $k(x)$ 是可积函数。对于微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

构造 Picard 序列并证明：存在 $h > 0$，使得在区间 $[x_0, x_0 + h]$ 上 Picard 序列一致收敛到 (1) 的解。

10、（15 分）设常数 $a > 0$，$f(t,y)$ 和 $\partial f/\partial y$ 关于 (t,y) 在 $0 \le t < \infty$, $|y| < k$ 上是连续的，k 是一个常数。并且 f 关于 $0 \le t < \infty$ 一致成立下列极限

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{|f(t,y)|}{|y|} = 0$$

设 $b(t)$ 关于 $0 \le t < \infty$ 连续，并且 $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$，如果 t_0 充分大，证明：存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 $|y_0| < \delta$，微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -ay + b(t)y + f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

的解 $y = \varphi(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上存在，并且满足

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

11、（15 分）考虑方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(t) - x^2$，其中 $k(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $1 \le k(t) \le 2$。

(a) 证明：若 $x(0) \ge 0$，则解在 $[0, +\infty)$ 上存在。

(b) 若 $x_1(0) \ge 0, x_2(0) \ge 0$，证明：

$$\lim_{t\to+\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0$$