

# 中国科学技术大学 2022 年秋季学期微分方程 I 期末试卷

## (B 卷)

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

- 注意: 1. 计算题只写结果不写过程, 不给分. 所有题目中使用的定理或者命题需要注明.  
2. 必须用题目指定的方法计算或者证明, 否则不得分.

1. (20 分) 利用分离变量法求解方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = Ax, & 0 < x < l \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = Bt, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中,  $A, B$  是常数.

2. 如果已知 (形式上) 有如下关系

$$\left( e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t} \right) \gamma(x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{n/2}} e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \xi, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $i = \sqrt{-1}$  表示虚数单位.

- (a) (10 分) 用 Fourier 变换方法求解薛定谔方程的解

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

(这里  $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  是一个取值为复数的函数.)

- (b) (10 分) 薛定谔方程是否具有有限传播速度? 当时间  $t \rightarrow +\infty$  时,  $u(x, t)$  会怎样? 回答并简要说明理由.

3. (15 分) 令  $\mathbb{R}_+^2$  表示上半平面, 用格林函数法求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

4. (15 分) 令  $B$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的球  $B_R(x_0)$ . 设  $u \in C^1(\bar{B}) \cap C^2(B)$  是调和的, 证明:

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_B |u|.$$

5. (15 分) 用极大值原理证明: 热传导方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - 2\partial_x u - 2u = 0, & 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + u(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

的古典解只有零解.

(提示: 考虑函数  $v = e^{-\lambda t}u(x, t)$ , 其中  $\lambda$  需要选取.)

6. 设  $u(x, t)$  是自由波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

的解. 其中  $f(x), g(x)$  是光滑函数, 并且在以原点为中心半径为  $R$  的球  $B_R$  外恒为零.

(a) (10 分) 定义

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla u(x, t) \partial_t u(x, t) dx.$$

证明: 对于任意的时间  $t \geq 0$ , 存在  $C = C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2)$  (即  $C$  与  $R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2$  有关), 使得  $|M(t)| < C(R, t, \|\nabla f\|_2, \|g\|_2) < +\infty$ .

(b) (10 分) 证明:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

一些可能用到的事实:

1. Fourier 变换及逆变换:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

2. 在第 6 题中,

$$\|\nabla f\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|g\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$