2019 秋微分方程 (I) 期中考试

整理人: 黄天一

ElegantLaTeX Program

更新：2022 年 11 月 3 日

1. 选择题: 缺少题目, 一共 5 道.
2. 求解下列方程:

   (a). $x' = \cos^2(x-t)$.

   (b). $(\sqrt{t^2-x^2}+x)dt - tdx = 0$.

   (c). $(2t^3+x)dt + (4t^2x - t)dx = 0$.

   (d). $x' + e^{x'} - \frac{1}{2}x = 0$.

   (e). $x'' + 3x' - 40x = 2 + (t+1)e^{5t}$.

   (f). $x'' - 2tx' + 4x = 0$.

3. 已知带阻尼的振动方程 $x'' + 2\beta\omega_0 x' + \omega_0^2 x = q\sin\omega t$, 其中 ω 为驱动力频率, ω_0 为固有频率, β 为阻尼系数, q 为输入能量. 求出上述物理量满足何条件时振幅最大, 并求出这个最大值.
4. 求解下列常微分方程组的初值问题:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + e^t \sin 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + 2y + z \\ x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = -1 \end{cases}$$
5. (a). 已知微分方程 $x' = t^2 f(x)$, 其中 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 且 $xf(x) < 0 (\forall x \neq 0)$. 求证: 任一满足 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 必定在 $[t_0, +\infty)$ 上存在.

   (b). 设 $I = [a, b]$, $f \in C(I)$ 且 $K \in C(I \times I)$. 求证: 积分方程
$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds$$
   在 I 上有唯一连续解.
6. 考虑初值问题 $x' = f(x), x(0) = x_0$, 其中 $f(x)$ 在实数轴上连续可微.

   (a). 求证: 初值问题的解 $\varphi(t; x_0)$ 存在唯一.

   (b). 在初值问题的存在区间 $[-h, h]$ 内**讨论** $\varphi(t, x_0)$ 关于 (t, x_0) 的连续性.

   (c). 设解 $\varphi(t; x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在. 若给定 x_0 且对任意自然数 k 成立 $|\varphi(k; x_0) - x_0| < M$, 其中 $M > 0$ 为常数. 证明: $\varphi(t; x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.
7. 讨论常微分方程组
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - 2y + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}x + ay - 2x^2 y \end{cases}$$
   零解的稳定性.
8. 已知一阶 PDE 的初值问题
$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

(a). 求初值问题的解.

(b). 题目暂缺.