第 15 章 2019 秋微分方程 (I) 期末参考解答 (宁班)(By 黄天一)

问题 15.1(每小题 5 分, 共 30 分)

1. 偏微分方程 $u_{xx} - 2\sin y u_{xy} - \cos^2 y u_{yy} + x u_x - y u_y + u = 0$ 的类型是 (　　).
2. 波动方程初值问题 $u_{tt} - 4u_{xx} = 0, u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = 2x$ 的解是 (　　).
3. 热方程定解问题 $u_t = 2u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0$; $u|_{t=0} = x^2(1-x), u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = \sin^2 t$ 的解 $u(x,t)$ 在 $[0,1] \times [0,+\infty)$ 上的最大、最小值分别是 (　　).
4. 设函数 u 在有界区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 内调和, 且在 $\overline{D}$ 上有连续的一阶偏导数, 则 $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS =$ (　　).
5. 设 $u(x,t)$ 满足 $u_t = 9\Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty), u|_{t=0} = e^{-9|x|^2}$, 则 $\lim\limits_{t \to +\infty} u(0,t) =$ (　　).
6. 给出将方程 $u_t = 8u_{xx} + 2u_x^2$ 化为热方程 $v_t = 8v_{xx}$ 的一个变换 $v(u) =$ (　　).

解

1. 由于 $\Delta = (-\sin y)^2 + \cos^2 y = 1 > 0$, 故方程为双曲型.
2. 由 d'Alembert 公式可得解为
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+2t)^2 + (x-2t)^2] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 2s ds = x^2 + 4t^2 + 2xt.$$
3. 记 $Q = (0,1) \times (0,+\infty), \Gamma = \overline{Q} \setminus Q$, 由最值原理可得
$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\Gamma} u = \max\{\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} x^2(1-x), \max_{t \geqslant 0} \sin^2 t, 0\} = 1.$$
$$\min_{\overline{Q}} u = \min_{\Gamma} u = \min\{\min_{0 \leqslant x \leqslant 1} x^2(1-x), \min_{t \geqslant 0} \sin^2 t, 0\} = 0.$$
4. 由 Green 公式可得
$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_D \Delta u dx = 0.$$
5. 借助 n 维热核可得
$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(-y,t)\varphi(y)dy = \frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{36t} - 9|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{1}{36t}+9)|y_k|^2} dy_k = \frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{36t} + 9\right)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-|z_k|^2} dz_k \\ &= \left(\frac{1}{1+324t}\right)^{\frac{n}{2}} \to 0 (t \to +\infty). \end{aligned}$$
6. 计算可得
$$u_t = u'(v)v_t, \quad u_x = u'(v)v_x, \quad u_{xx} = u''(v)v_x^2 + u'(v)v_{xx}.$$
代回原方程可得
$$v_t = 8v_{xx} + \frac{8u''(v) + 2u'(v)^2}{u'(v)} v_x^2.$$
只需令 $8u''(v) + 2u'(v)^2 = 0$, 由此可求得一解 $u = 4\ln v$, 于是符合要求的一个变换为 $v = e^{\frac{u}{4}}$.

问题 15.2(10 分) 设 $u(x,t)$ 是如下三维波动方程初值问题
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的光滑解, 其中 $c>0$ 为常数, $\varphi(x),\psi(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. 证明: 存在常数 $C>0$ 使得 $|u(x,t)|\leqslant \frac{C}{t}(x\in\mathbb{R}^3,t>0)$.

证明 由 Kirchhoff 公式可得初值问题的解为

$$u(x,t)=t\fint_{\partial B(x,ct)}\psi(y)dS(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,ct)}\varphi(y)dS(y)\right)^{1}.$$

整理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,ct)}\varphi(y)dS(y)\right)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(0,1)}\varphi(x+ctz)dS(z)\right)\\&=\fint_{\partial B(0,1)}cz\cdot\nabla\varphi(x+ctz)dS(z)\\&=\fint_{\partial B(x,ct)}\nabla\varphi(y)\cdot\frac{y-x}{t}dS(y).\end{aligned}$$

由此可得

$$u(x,t)=\fint_{\partial B(x,ct)}(t\psi(y)+\varphi(y)+\nabla\varphi(y)\cdot(y-x))dS(y).$$

进而成立估计

$$\begin{aligned}|tu(x,t)|&\leqslant\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}(t|\psi(y)|+|\varphi(y)|+|\nabla\varphi(y)||y-x|)dS(y)\\&\leqslant\frac{1}{4\pi c^2}\int_{\partial B(x,ct)}(|\psi(y)|+c|\varphi(y)|)dS(y)+\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\\&\leqslant\frac{1}{4\pi c^2}(\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}+c\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)})+\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y).\end{aligned}$$

注意到有

$$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant\frac{1}{4\pi c^2t}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},$$

$$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant t\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

由此可得

$$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant\min\left\{\frac{1}{4\pi c^2t}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},t\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right\}=\sqrt{\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}}{\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}}.$$

综上可得存在 $C>0$, 使得 $|tu(x,t)|\leqslant C,\forall t>0$.

问题 15.3(10 分) 找出所有的 $\omega\in\mathbb{R}$ 使得如下一维波动方程初边值问题的解 $u(x,t)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上有界:

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}+\sin(\pi x)\sin(\omega t), & 0<x<1,t>0\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0\end{cases}$$

[1]这里 $\fint$ 表示平均积分, 即

$$\fint_U f=\frac{1}{|U|}\int_U f.$$

解 利用齐次化原理求解. 设函数 $z(x,t;\tau)$ 满足

$$\begin{cases} z_{tt}=4z_{xx}, \quad 0<x<1, t>\tau \\ u|_{t=\tau}=0,\ u_t|_{t=\tau}=\sin(\pi x)\sin(\omega\tau) \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \end{cases}$$

考虑上述初边值问题的分离解 $T(t-\tau)X(t)$, 则

$$\frac{T''(t-\tau)}{4T(t-\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=:-\lambda.$$

求解 X 关于 x 的边值问题可得特征值、特征函数为 $\lambda_n=n^2\pi^2$, $X_n(x)=\sin(n\pi x)$. 代回得

$$T_n''(t-\tau)+(2n\pi)^2T_n(t-\tau)=0\Rightarrow T_n(t-\tau)=A_n\cos(2n\pi(t-\tau))+B_n\sin(2n\pi(t-\tau)).$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)=0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}2n\pi B_n\sin(n\pi x)=\sin(\pi x)\sin(\omega\tau).$$

作 Fourier 展开可得

$$A_n=0, \quad B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(\omega\tau)\sin(\pi x)\sin(n\pi x)dx=\begin{cases}\dfrac{\sin\omega\tau}{2\pi}, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

由此可得

$$z(x,t;\tau)=\frac{\sin\omega\tau}{2\pi}\sin(2\pi(t-\tau))\sin(\pi x).$$

积分可得

$$u(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{2\pi}\cdot\dfrac{2\pi\sin(\omega t)-\omega\sin(2\pi t)}{4\pi^2-\omega^2}, & \omega\neq\pm 2\pi\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{4\pi}\cdot\dfrac{\sin(2\pi t)-2\pi t\cos(2\pi t)}{2\pi}, & \omega=2\pi\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{4\pi}\cdot\dfrac{2\pi t\cos(2\pi t)-\sin(2\pi t)}{2\pi}, & \omega=-2\pi\end{cases}$$

由此可得当 $\omega\neq\pm2\pi$ 时, $|u(x,t)|$ 有上界 $\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi+|\omega|}{|4\pi^2-\omega^2|}$; 当 $\omega=\pm2\pi$ 时, $u(x,t)$ 无界.

问题 15.4(10 分) 令 $c\leqslant 0$ 为常数, 考虑如下热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+cu, \quad 0<x<1, t>0 \\ u|_{t=0}=x \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=1 \end{cases}$$

证明: $0\leqslant u(x,t)\leqslant 1$ 对所有 $x\in[0,1], t\geqslant 0$ 均成立.

证明 任取 $T>0$, 我们只需证明: 对所有 $x\in[0,1], 0\leqslant t\leqslant T$, 均成立 $0\leqslant u(x,t)\leqslant 1$. 实则只需证明 u 在 $\overline{Q}_T$ 上的最值均在抛物边界上取到.

假设 $\max_{\overline{Q}_T}u>\max_{\Gamma_T}u$, 则当 $\varepsilon>0$ 充分小时, $v\triangleq u-\varepsilon t$ 同样满足 $\max_{\overline{Q}_T}v>\max_{\Gamma_T}v$. 设 v 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值点为 $(x_0,t_0)\in Q_T$, 则 $v_{xx}(x_0,t_0)\leqslant 0$ 且 $v_t(x_0,t_0)\geqslant 0$. 注意到 v 满足

$$v_t=u_t-\varepsilon=u_{xx}+cu-\varepsilon=v_{xx}+cv+\varepsilon(ct-1).$$

结合 v 的最大值大于 1 可得

$$0\leqslant v_t(x_0,t_0)=v_{xx}(x_0,t_0)+cv(x_0,t_0)+\varepsilon(ct_0-1)\leqslant\varepsilon(ct_0-1)<0.$$

矛盾! 因此 $\max_{\overline{Q}_T} u=\max_{\Gamma_T} u$. 类似可以证明 $\min_{\overline{Q}_T} u=\min_{\Gamma_T} u$(留作练习).

问题 15.5(10 分) 令 $k>0$ 与 c 均为常数, 求解如下热方程初值问题

$$\begin{cases} u_t=k\Delta u+cu+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

解 首先考虑齐次方程

$$\begin{cases} v_t=k\Delta v+cv, & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0 \\ v(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

作变换 $\bar{v}=ve^{-ct}$, 则有 $\bar{v}_t=(v_t-cv)e^{-ct}, \Delta\bar{v}=\Delta v\cdot e^{-ct}$, 因此

$$\bar{v}_t=k\Delta\bar{v},\quad \bar{v}(x,0)=\varphi(x).$$

由此可得

$$v(x,t)=\bar{v}(x,t)e^{ct}=\frac{e^{ct}}{(4k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy.$$

然后考虑齐次边界下的非齐次方程

$$\begin{cases} w_t=k\Delta w+cw+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,t>0 \\ w(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

考虑初值问题

$$z_t=k\Delta z+cz(t>\tau>0),\quad z(x,\tau)=f(x,\tau).$$

类似前者可求得

$$z(x,t;\tau)=\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dy.$$

由齐次化原理即可得

$$w(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau=\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dyd\tau.$$

由叠加原理可得原方程的解为

$$u(x,t)=\frac{e^{ct}}{(4k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy+\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dyd\tau.$$

问题 15.6(10 分) 设区域 $D_0\subset D\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 均有界, 证明如下边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=0 \quad \text{in } D\setminus\overline{D_0} \\ \left(u+\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right)\Big|_{\partial D}=0,\ \left(u-\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right)\Big|_{\partial D_0}=0 \end{cases}$$

的解为零.

证明 设 u 是边值问题的解, 则有

$$\begin{aligned} E&=\int_{D\setminus\overline{D}_0}|\nabla u|^2dx=\int_{\partial D}u\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_{\partial D_0}u\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_{D\setminus\overline{D}}u\Delta udx \\ &=-\int_{\partial D}u^2dS-\int_{\partial D_0}u^2dS\leqslant 0. \end{aligned}$$

另一方面, $E \geqslant 0$, 所以 $E=0 \Rightarrow \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u$ 恒为常数. 结合边值条件即可得 u 为零解.

问题 15.7(10 分) 设区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 有界, 证明:

$$\begin{cases} \Delta u + u^2(1-u) = 0 & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

的任一解 $u(x)$ 满足 $0 \leqslant u(x) \leqslant 1, x \in D$.

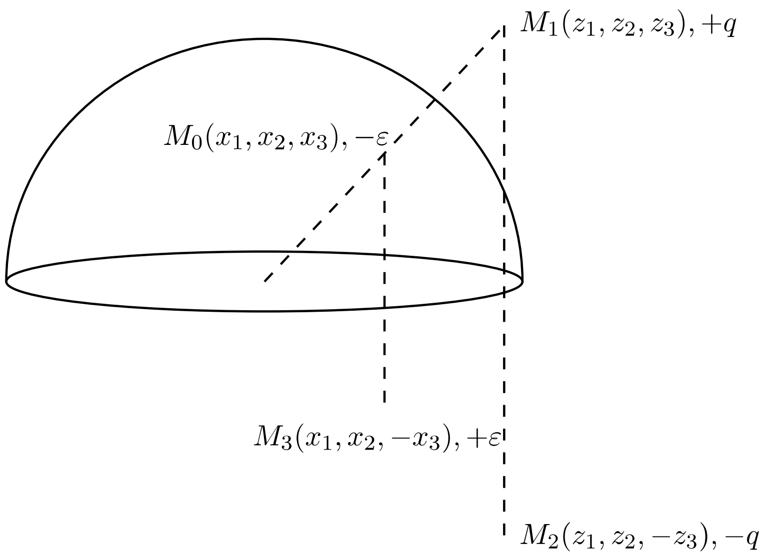
证明 设 $x_1, x_2 \in \overline{D}$ 分别是 u 在 $\overline{D}$ 上的最小值、最大值点.

假设 $u(x_1) < 0$, 由边界条件可得 $x_1 \in D$. 此时 Hessian 矩阵 D^2u 半正定, 因此 $\Delta u(x_1) = \mathrm{tr}(D^2u(x_1)) \geqslant 0$, 但 $\Delta u(x_1) = u(x_1)^2(u(x_1)-1) < 0$, 矛盾!

假设 $u(x_2) > 1$, 由边界条件可得 $x_2 \in D$. 此时 Hessian 矩阵 D^2u 半负定, 因此 $\Delta u(x_2) = \mathrm{tr}(D^2u(x_2)) \leqslant 0$. 但 $\Delta u(x_2) = u(x_2)^2(u(x_2)-1) > 0$, 矛盾!

综上可得 $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$ 对任意 $x \in \overline{D}$ 都成立.

问题 15.8(10 分) 请找出半球 $D = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 1, x_3 > 0\}$ 的 Green 函数以及边值问题 $\Delta u = 0$ in D,$u|_{\partial D} = x_1x_2x_3$ 的解.



解 如图所示, 考虑半球内两点 $M_0(x_1,x_2,x_3), M(y_1,y_2,y_3)$. 设 M_0 处电荷为 $-\varepsilon$, 记 $M_1 = (z_1,z_2,z_3)$ 为 M_0 关于半球面的对称点, M_2, M_3 分别是 M_1, M_0 关于底面的对称点. 设 M_1 处电荷为 $+q$, 由于球面上电势为零, 且 $|x|\cdot|z| = 1$, 故

$$k\frac{-\varepsilon}{1-|x|} + k\frac{q}{|z|-1} = 0 \Rightarrow q = \frac{\varepsilon}{|x|}.$$

取 $\varepsilon = 1$, 则 M 处的电势, 即 Green 函数为

$$\begin{aligned} G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\Bigg(&-\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}} \\ &+\frac{|x|}{\sqrt{(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)^2+(x_3-|x|^2y_3)^2}} \\ &-\frac{|x|}{\sqrt{(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)^2+(x_3+|x|^2y_3)^2}} \\ &+\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}}\Bigg). \end{aligned}$$

当 $y\in\partial B(0,1)$ 时, 成立

$$(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)+(x_3-|x|^2y_3)^2=|x|^2((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2).$$

$$(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)+(x_3+|x|^2y_3)^2=|x|^2((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2).$$

由此计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial\nu}\bigg|_{\partial D\cap\mathbb{R}^3_+}&=\sum_{i=1}^{3}y_i\frac{\partial G}{\partial y_i}\\&=\frac{1-|x|^2}{4\pi}\left(\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right).\end{aligned}$$

所以边值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x)=\frac{1-|x|^2}{4\pi}\int_{\partial D\cap\mathbb{R}^3_+}y_1y_2y_3&\left(\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right.\\&\left.-\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dS(y).\end{aligned}$$

参考公式:

1. Laplace 算子的极坐标形式:
$$\Delta_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\ \Delta_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$
2. Green 第一公式: $\int_D v\Delta u dx=\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_D\nabla v\cdot\nabla u dx$; n 维热核 $S(x,t)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$.
3. 调和方程基本解: $V(x-y)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|(n=2)$, $V(x-y)=-\frac{1}{4\pi|x-y|}(n=3)$.
4. 三维波动方程 Kirchhoff 公式: $x\in\mathbb{R}^3$, $t>0$
$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}(x)}\psi(y)dS(y)+\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{ct}(x)}\frac{\varphi(y)}{t}dS(y).$$
5. $\mathbb{R}^n$ 中的 Fourier 变换和逆变换:
$$\mathscr{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\quad\mathscr{F}^{-1}[f](x)=\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$