微分方程引论第四、六次习题课讲义

2023 秋（赵班）

作者：wclw

时间：2023 年 10 月 22 日，2023 年 11 月 13 日

第 1 章 基础内容

1.1 幂级数解法

写在前面：本部分会作为考试中计算部分的选考题之一，掌握了或许是多一种选择？

我们已经讨论了诸多方程的求解, 如在第二章给出的一阶线性方程以及特殊的一阶方程，第五章给出的常矩阵高阶线性微分方程组、高阶常系数微分方程，我们已经给出了它们的一般算法以及显式解. 但对于绝大部分的方程, 并不存在如此普适的解法, 也并不能做到给出显示解, 我们在第一次习题课已经告诉大家，最简单的一阶非线性方程 Ricatti 方程若未知一个特解，没有普适性的解法. 这时我们希望退而求其次, 给出它们的级数解. 既然要将函数写为级数形式, 自然避不开解析这一概念:

定义 1.1 (解析)

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域, $f: U \to \mathbb{R}$ 为光滑函数. 称 f 在 $p = (p_1, \cdots, p_n) \in U$ 处解析, 是指在 p 的某个邻域内, f 可以展开成收敛幂级数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_\alpha (x_1 - p_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - p_n)^{\alpha_n}.$$

♣

注 函数在某点解析, 则必然光滑, 这是由于幂级数在收敛半径内是内闭一致收敛的, 一致收敛对于求导与无穷求和换序拥有良好的性质, 而多项式显然是无穷可微的; 反之未必, 请看下面的例题 1.1.

例题 1.1(光滑性与解析性) 考虑函数 $f(x) = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}(x > 0), 0(x \leqslant 0)$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处光滑但不解析, 此时 (1.1.1) 的解为 $y(x) = e^{-\frac{1}{x}}(x > 0), 0(x \leqslant 0)$, 它在 $x = 0$ 处也是光滑但不解析. 该两个问题的证明可以参考史济怀老师《数学分析教程》上册 P206 类似的证明, 思路为证明导数为 $P(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ 类似的形式, 则 0 处光滑且任意阶的导数为 0. 由于若该函数能展开为幂级数的形式, 则一定为 Taylor 级数, 故该级数不收敛于该函数, 该函数不解析.

1.1.1 Cauchy 定理

首先简要讨论 Cauchy 问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1.1.1}$$

在 (x_0, y_0) 附近可以用幂级数法求解的条件. 首先我们希望解保持解析的性质, 那么方程的右端函数 $f(x, y)$ 也应保证解析的性质, 此时称微分方程也是解析的. 例题 1.1 说明: 如果 f 在某点附近不解析, 即使 f 光滑, (1.1.1) 的解也可以不解析, 也说明了我们确实需要 $f(x, y)$ 的解析性. 另一方面, 如果 f 在 (x_0, y_0) 附近解析, 我们自然希望初值问题 (1.1.1) 的解也能保持解析性质.

幸运的是，该结果确实是成立的，以下为 Cauchy 在 1840 年左右证明的理论. 为了方便书写, 此处考虑 y 为函数的情形, 对于向量情形的证明类似. 全过程的证明请大家参考课本 6.1 节详尽的证明.

定理 1.1 (Cauchy 定理)

若 (1.1.1) 中的函数 $f(x, y)$ 在区域 $R: |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta$ 上解析, 则 Cauchy 问题 (1.1.1) 在 x_0 的附近存在唯一的解析解.

♡

证明 证明的核心是引入"优函数"的概念: 对于解析函数 $f(x,y)=\sum a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$, 我们希望找到找到一个更易于控制和讨论的解析函数 $F(x,y)=\sum A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$, 它比 $f(x,y)$ 更"优", 即满足 $|a_{ij}|\leqslant|A_{ij}|$. 我们现在需要做的工作是:

1. 找到满足上述的优函数 $F(x,y)$. 一个合适的优函数为:
$$F(x,y)=\frac{M}{(1-\frac{x-x_0}{a})(1-\frac{y-y_0}{b})}.$$
其中 $M,a,b>0$ 为某常数, 且 $0<a<\alpha, 0<b<\beta$.
则 $F(x,y)$ 在区域 $|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b$ 上优于 $f(x,y)$.
证明: 设 $f(x,y)$ 在区域 $|x-x_0|<\alpha,\ |y-y_0|<\beta$ 可以展开为
$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$
则 $\forall\, 0<a<\alpha,\ 0<b<\beta$, 均有数项级数
$$\sum_{i,j=0}^{\infty}|a_{ij}|a^ib^j$$
收敛, 故存在常数 M, 使得 $|a_{ij}|\leq\frac{M}{a^ib^j}$, $\forall i,j$.
考虑级数
$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{M}{a^ib^j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$
由于在区域 $|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b$ 上, $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^i}{a^i}$ 与 $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(y-y_0)^j}{b^j}$ 均绝对收敛, 由数项级数乘积收敛的 Cauchy 定理可知,
$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{M}{a^ib^j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j=M\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^i}{a^i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(y-y_0)^j}{b^j}=\frac{M}{(1-\frac{x-x_0}{a})(1-\frac{y-y_0}{b})}.$$
因此
$$F(x,y)=\frac{M}{(1-\frac{x-x_0}{a})(1-\frac{y-y_0}{b})}$$
确实为 $f(x,y)$ 的优函数.
2. 证明 $F(x,y)$ 对应的 Cauchy 问题 $y'=F(x,y), y(x_0)=y_0$ 在局部存在解析解, 具体而言, 在区间 $|x-x_0|<\rho$ 上存在解析解 $y=y(x)$, 常数 $\rho=a(1-e^{-b/2aM})$.
证明: 注意到对于 $F(x,y)$ 的方程为可分离变量的方程, 直接求初值问题的解, 对两边同时积分,
$$\int_{y_0}^{y}1-\frac{y-y_0}{b}\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}\frac{M}{1-\frac{x-x_0}{a}}\mathrm{d}x.$$
即
$$\frac{b}{2}(1-\frac{y-y_0}{b})^2-\frac{b}{2}=aM\mathrm{In}(1-\frac{x-x_0}{a}).$$
进一步化简为
$$y=y_0+b-b[1+\frac{2aM}{b}\mathrm{In}(1-\frac{x-x_0}{a})]^{\frac{1}{2}}.$$
由于 $|x-x_0|<\rho<a$, $\mathrm{In}(1-\frac{x-x_0}{a})$ 可以展开为 $x-x_0$ 的幂级数, 且
$$|\frac{2aM}{b}\mathrm{In}(1-\frac{x-x_0}{a})|<1,$$
而 $|s|<1$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 可以展开为幂级数, 因此 y 可以被展开为幂级数.

3. 给出 (1.1.1) 的形式解, 这里的形式解即为不考虑敛散性的前提下给出的级数解, 从形式解的构造即可说明解的唯一性. 并证明 (2) 中初值问题的解也是此时求出的形式解的优函数, 进而形式解确实是收敛的, 于是证明了存在性. 具体而言:

$f(x,y)$ 已在 R 上展开为如下幂级数:

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$

做初值问题 (1.1.1) 的形式幂级数解:

$$y(x)=y_0+\sum_{i=1}^{\infty}c_i(x-x_0)^i. \tag{1.1.2}$$

直接计算可知:

$$c_1=y'(x_0)=f(x_0,y_0)=a_{00};$$

$$c_2=\frac{1}{2!}y^{(2)}(x_0)=\frac{1}{2!}(f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)y'(x_0))=\frac{1}{2!}(a_{10}+a_{01}a_{00}).$$

而考虑级数的一般项 $a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$, 只有对 x 求 i 次导, 对 y 求 j 次导后在 (x_0,y_0) 处的导数非 0, 且为值 $i!j!a_{ij}$, 因此可知 c_k 均可以被 a_{ij} 所表达, 按照如此的方式唯一确定了形式幂级数解 (1.1.2).

另一方面, c_m 最终的形式应该为关于 a_{ij} 的多项式, 且多项式的系数为正数 (均由求导所得, 仅与标号有关!). 接下来考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0.$$

$F(x,y)$ 的定义见 (1), 且已经证明 $F(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 的优函数, 将其展开为幂级数则有

$$F(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$

且 $|a_{ij}|\leqslant|A_{ij}|,\forall\, i,j$. 做该初值问题的形式幂级数解:

$$y(x)=y_0+\sum_{m=1}^{\infty}C_m(x-x_0)^m.$$

和初值问题 (1.1.1) 类似的分析, C_m 最终的形式应该为关于 A_{ij} 的多项式, 且多项式的系数为正数, 因此 $|c_m|\le|C_m|=C_m$, 故 $\sum_{m=1}^{\infty}C_m(x-x_0)^m$ 为 $\sum_{m=1}^{\infty}c_m(x-x_0)^m$ 的优级数.

由 (2) 的结论, 该形式解在区间 $|x-x_0|<\rho$ 上收敛, 因此该区域上 $\sum_{m=1}^{\infty}c_m(x-x_0)^m$ 亦收敛, 形式解确实为初值问题 (1.1.1) 的解, 这样就证明了存在性, 则命题证毕.

上述定理完全可以推广到一阶方程组的情形, 这启发我们把幂级数解法推广至高阶方程. 我们知道: 首一的二阶线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 可以写为一阶方程组

$$\begin{cases}y_1'(x)=y_2\\ y_2'(x)=-p(x)y_2-q(x)y_1\end{cases}$$

若 $p(x),q(x)$ 在 x_0 附近解析, 则由 Cauchy 定理可得上述方程组在 x_0 附近也存在解析解, 这也就说明首一的二阶线性方程存在解析解. 因此根据定理 1.1(Cauchy 定理), 我们直接可以得到:

定理 1.2 (首一二阶齐次方程解析解的存在唯一性)

对于方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.1.3}$$

其中 $p(x), q(x)$ 在区间 $|x - x_0| < r$ 上解析, 则方程在区间 $|x - x_0| < r$ 上有收敛的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

其中 c_0, c_1 为任意常数, 其由初始条件决定.

注 该定理的证明由定理 1.1 即得, 但是需要注意解的存在区间. 注意到该方程等价的微分方程组为

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 \\ y_2'(x) = -p(x)y_2 - q(x)y_1 \end{cases}$$

其中函数 y_1 与 y_2 均在 R 上解析, 因此在定理 1.1 的推导过程中 β 为无穷, 可推出在 $|x - x_0| < r$ 上均存在解析解.

例题 1.2(20 宁班, mid) 给出方程 $x'' + x\sin t = 0$ 的 $O(t^6)$ 的通解.

解 设方程的幂级数解为 $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i$, 由于 $\sin t$ 展开为 Taylor 级数为 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1}$, 代回原方程可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i i(i-1)t^{i-2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i = 0.$$

整理比较系数可得

$$C_{i+2}(i+1)(i+2) + \sum_{\substack{2j+1+k=i \\ j,k\geqslant 0}} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} C_k = 0.$$

写出前面几项系数的递归式如下:

$$C_2 = 0, \quad 6C_3 + C_0 = 0, \quad 12C_4 + C_1 = 0, \quad 20C_5 + C_2 - \frac{C_0}{6} = 0, \quad 30C_6 + C_3 - \frac{C_1}{6} = 0.$$

求解可得 $O(t^6)$ 的通解

$$x(t) = C_0 + C_1 t - \frac{C_0}{6} t^3 - \frac{C_1}{12} t^4 + \frac{C_0}{120} t^5 + \frac{C_0 + C_1}{180} t^6 + o(t^6).$$

1.1.2 幂级数解法

更进一步, 对于方程 $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$, 其中函数 $A(x), B(x), C(x)$ 均在区间 $|x - x_0| < r$ 上解析. 假定 $A(x)$ 不为 0, 则方程两端同除以 $A(x)$, 划归为已知的情形.

注 解析为点态的性质, 因此考察的实际为 x_0 点的邻域上面是否存在解析解, 因此此处的限制本质是考虑 $A(x_0)$ 是否为 0; 同除以 $A(x)$ 后仍应该确保 $\frac{B(x)}{A(x)}$ 与 $\frac{C(x)}{A(x)}$ 的解析性.

例题 1.3(Hermite 方程) 求解 Hermite 方程

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

其中 λ 为常数.

解 设该方程有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

带入方程即知

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

比较同幂次的系数有:

$$2c_2 + \lambda c_0 = 0;$$

$$6c_3 - 2c_1 + \lambda c_1 = 0;$$

$$n(n-1)c_n - 2(n-2)c_{n-2} + \lambda c_{n-2} = 0.$$

则

$$c_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}c_n \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

该表达式即给出了幂级数解的系数.

注 当 λ 为非负偶数后, 该幂级数解成为多项式, 称作 Hermite 多项式.

例题 1.4(Legendre 方程) 求解 Legendre 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

其中 n 为常数.

解 $|x| < 1$ 时, $\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$ 与 $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ 均为解析的, 因此 $|x| < 1$ 区域上存在唯一的解析解.

之后的过程即为设出形式解, 根据方程求解系数的关系, 完整过程见课本 P228.

对于 $A(x)$ 在 x_0 处值为 0 的情形, 考虑 1.1.3 中的广义幂级数解法.

1.1.3 二阶线性方程的广义幂级数解

上文中我们证明了某些二阶线性方程可以使用幂级数法求解. 但如果二阶线性方程

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0 \tag{1.1.4}$$

无法化为首一且系数函数解析的形式时, 幂级数法可能失效. 我们考虑如下两个例子:

例题 1.5 考虑微分方程 $x^2y'' - 2y = 0$ 的解在点 $x = 0$ 附近的性态.

解 该方程为 Euler 方程, 这里只考虑 $x > 0$ 时 $x = 0$ 附近的性态, 令 $x = e^t$, 则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1)y - 2y = 0$. 该方程具有通解 $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} = c_1x^2 + c_2\frac{1}{x}$.

1. 一方面, 该方程在 $x \to 0$ 的有界解为 $y = cx^2$, 则 $y(0) = y'(0) = 0$. 表明该方程不具有 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的解. Cauchy 问题不存在解! 这里的 1 可以替换为任意非 0 的数字.
2. 另一方面, $\frac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 时无界, 因此在 $x = 0$ 处也不能展开成收敛的幂级数.

例题 1.6 考虑微分方程 $x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0$ 的解在点 $x = 0$ 附近的性态.

解 设它在 $x = 0$ 附近存在非平凡的幂级数解 $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i$, 代入可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_ii(i-1)x^i + (3x-1)\sum_{i=0}^{\infty} c_iix^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(c_i(i+1)^2 - c_{i+1}(i+1))x^i = 0.$$

由此可得 $c_{i+1} = (i+1)c_i$, 因此 $c_i = i!c_0$. 因此幂级数解为 $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_0i!x^i$. 若 $c_0 = 0$, 即对应零解, 这是平凡的; 若 $c_0 \neq 0$, 则幂级数的收敛半径为零, 即级数只在 $x = 0$ 处收敛, 矛盾!

例题 1.7 求微分方程 $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ 的两个线性无关解.

解 令 $u(x) = y\sqrt{x}$, 则 $u(x)$ 满足:

1. $u' = y'\sqrt{x} + y\frac{1}{2\sqrt{x}}$,
2. $u'' = y''\sqrt{x} + y'\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}y\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

因此 $u'' + u = 0$. 该方程的线性无关解为 $u_1 = \cos x$,$u_2 = \sin x$. 由此可知原方程的两个线性无关解为

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-\frac{1}{2}},$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}.$$

考察该形式，并不是普通意义下的幂级数. 我们本节的目标就是通过引入所谓**广义幂级数**来求解 (1.1.4) 在正则奇点 x_0 附近的解. 在幂级数的基础上, 如上例我们对指数进行恰当的微操, 得到

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i (x - x_0)^{i+\rho},$$

其中 ρ 为实常数, 则上式称为广义幂级数.ρ 称为指标.

定义 1.2 (正则奇点)

设 (1.1.4) 可以重写为

$$(x - x_0)^2 P(x) y'' + (x - x_0) Q(x) y' + R(x) y = 0. \tag{1.1.5}$$

其中 P, Q, R 在 x_0 附近是解析的, 并且满足 $P(x_0) \neq 0$, $Q(x_0)^2 + R(x_0)^2 \neq 0$, 则称 x_0 是 (1.1.4) 的一个正则奇点.

♣

我们证明如下核心定理:

定理 1.3

(1.1.5) 给出的方程在正则奇点 x_0 附近存在收敛的广义幂级数解.

♡

证明 与 Cauchy 定理的证明一样, 我们仍旧先给出形式解, 再验证形式解确实局部收敛. 设 (1.1.5) 在 x_0 附近的形式广义幂级数解为

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i (x - x_0)^{i+\rho}.$$

自然地要求 $C_0 \neq 0$，否则改变指标的定义. 方程 (1.1.5) 在局部可以写为

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0) \left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i (x - x_0)^i \right) y'(x) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i (x - x_0)^i \right) y(x) = 0.$$

将广义幂级数代入, 比较系数可得

$$C_i (i + \rho)(i + \rho - 1) + \sum_{\substack{j+k=i \\ j,k \geqslant 0}} (r_j + (k + \rho) q_j) C_k = 0.$$

方便起见, 令 $f_0(\rho) = \rho(\rho - 1) + q_0 \rho + r_0$, $f_j(\rho) = q_j \rho + r_j (j \geqslant 1)$, 则上式可写为

$$C_0 f_0(\rho) = 0, \quad C_i f_0(\rho + i) + \sum_{k=0}^{i-1} C_k f_{i-k}(\rho + k) = 0.$$

为了便于确定系数, 我们希望找到合适的 ρ 使得 $f_0(\rho) = 0$ 且 $f_0(\rho + i) \neq 0 (i \geqslant 1)$. 这是可以做到的, 事实上, 设二次方程 $f_0(\rho)$ 的两个根为 ρ_1, ρ_2. 若均为实根, 则选取 $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$; 若为共轭复根, 则选取 $\rho = \rho_1$ 或 ρ_2 均可. 在如此选取的 ρ 下, 由递归式可以将 $C_1, \cdots, C_i, \cdots$ 唯一地表示为有关 C_0 的形式,

为方便起见，以下不妨设 $C_0=1$.

下面我们证明: 上述得到的广义幂级数解在局部是收敛的. 首先估计 q_j, r_j 的上界. 设幂级数 $\sum q_j(x-x_0)^j$ 和 $\sum r_j(x-x_0)^j$ 在邻域 $|x-x_0|<h$ 内收敛, 任取 $R<h$, 则存在常数 $M>0$, 使得

$$|q_j| \leqslant \frac{M}{R^j}, \quad |r_j| \leqslant \frac{M}{R^j}.$$

由于 ρ 已经给定，根据 f 的定义，不妨设 M 也使得 $|f_j(\rho)| \leqslant \frac{M}{R^j}(j\geqslant 1)$.

其次估计 $f_0(\rho+i)$. 设 $f_0(\rho)$ 的另一个根是 ρ', 则 $\rho+\rho'=1-q_0$. 将 ρ 的定义带入可得

$$f_0(\rho+i)=(\rho+i)(\rho+i-1)+q_0(\rho+i)+r_0=2i\rho+q_0 i+i^2-i=i(\rho-\rho')+i^2.$$

记 $d=(\rho-\rho')\geqslant 0$, 则 $|f_0(\rho+i)|\geqslant i(i+d)$.

断言: $|C_i|\leqslant (\frac{M}{R})^i, i=1,2,\cdots$. 利用归纳法证明断言.

- 对于 $i=1$, 我们有

$$|C_1|=\frac{|f_1(\rho)|}{|f_0(\rho+1)|}\leqslant \frac{M}{R(d+1)}\leqslant \frac{M}{R}.$$

- 设断言对于 $i-1(i\geqslant 2)$ 成立, 那么由递归式可得 (一个马后炮, 不妨设 $M>2$)

$$\begin{aligned}
|C_i| &\leqslant \sum_{k=0}^{i-1}|C_k|\frac{|f_{i-k}(\rho+k)|}{|f_0(\rho+i)|}\leqslant \sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{M}{R}\right)^k\frac{|f_{i-k}(\rho)|+k|q_{i-k}|}{i(i+d)}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i-1}\frac{M^{k+1}}{R^i}\frac{k+1}{i(i+d)}\leqslant \frac{1}{R^i(i+d)}\sum_{k=1}^{i}M^j=\frac{M^i-1}{R^i(i+d)}\frac{M}{M-1}\\
&\leqslant \frac{2(M^i-1)}{R^i(i+d)}<\left(\frac{M}{R}\right)^i.
\end{aligned}$$

断言证毕, 因此广义幂级数解 $y(x)=\sum C_i(x-x_0)^{i+\rho}$ 在 x_0 的一个邻域内收敛.

注 这个定理演示了估计系数以证明解析性的一般手法, 此后在 PDE 部分的 Laplace 方程部分也可以利用类似的手法与梯度估计来证明调和函数的解析性.

下面演示如何利用广义幂级数解法求解变系数的二阶常微分方程.

例题 1.8(赵班，21mid) 用 (广义) 幂级数方法求解方程

$$2xy''+(1-2x)y'-y=0.$$

解 设方程的广义幂级数解为 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^{k+\rho}$, 则有

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)x^{k+\rho-1}, \quad y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}.$$

代入方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(2k+2\rho-1)x^{k+\rho-1}-\sum_{k=0}^{\infty}C_k(2k+2\rho+1)x^{k+\rho}=0.$$

即有

$$C_0\rho(2\rho-1)x^{\rho-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2\rho+1)(C_{k+1}(k+\rho+1)-C_k)x^{k+\rho}=0.$$

不妨设 $C_0=1$. 考虑两种情况:

1. $\rho=0$, 则 $C_{k+1}(k+1)=C_k(k\geqslant 0)$. 因此 $C_k=\frac{1}{k!}$, 故一个解为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$.
2. $\rho=\frac{1}{2}$, 则 $C_{k+1}(k+\frac{3}{2})-C_k=0(k\geqslant 0)$. 因此 $C_k=\frac{2^k}{(2k+1)!!}$, 故一个解为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}x^{k+\frac{1}{2}}$.

综上可得方程通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}x^{k+\frac{1}{2}}.$$

1.2 基础内容回顾

1.3 习题讲解

1.3.1 作业部分

作业部分针对于国庆后三次课的作业，对应课本 5.1 与 5.2 节.

练习 1.1(P173 5.1 T2) 设当 $x\in(a,b)$ 时, 线性方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 中的函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为 0, 证明该方程组有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

证明

1. 首先证明方程组存在 $n+1$ 个线性无关解.
   设该方程对应的齐次方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的 n 个线性无关解为 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_n(x)$, 方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 具有特解 φ^*.
   claim: $\varphi_1+\varphi^*,\varphi_2+\varphi^*,\cdots\varphi_n+\varphi^*,\varphi^*$ 为 $n+1$ 个线性无关的解.
   考察方程
   $$c_1(\varphi_1+\varphi^*)+c_2(\varphi_2+\varphi^*)+\cdots+c_n(\varphi_n+\varphi^*)+c_{n+1}\varphi^*=0.$$
   即
   $$c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n+\sum_{i=1}^{n+1}c_i\varphi^*=0.$$
   若 $\sum_{i=1}^{n+1}c_i\neq0,\varphi^*=\frac{-1}{\sum_{i=1}^{n+1}c_i}(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n)$, 为齐次方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的解, 与 $f(x)$ 不恒为 0 矛盾. 故 $\sum_{i=1}^{n+1}c_i=0$, 进而 $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n=0$. 由 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\varphi_n(x)$ 的线性无关性知 $c_i=0,\forall\, i=1,2,\cdots n$. 故 $c_1=c_2=\cdots=c_{n+1}=0$, 即 $\varphi_1+\varphi^*,\varphi_2+\varphi^*,\cdots\varphi_n+\varphi^*,\varphi^*$ 线性无关, 且均为方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$ 的解.
2. 再证明不可能存在 $n+2$ 个线性无关的解.
   若 $\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots\phi_{n+2}(x)$ 为 $n+2$ 个线性无关的解, 则 $\phi_2-\phi_1,\cdots\phi_{n+2}-\phi_1$ 为方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 的 $n+1$ 个解, 下说明这 $n+1$ 个解也是线性无关的:
   考虑方程
   $$d_1(\phi_2-\phi_1)+\cdots+d_{n+1}(\phi_{n+2}-\phi_1)=0.$$
   即
   $$-\sum_{i=1}^{n+1}d_i\phi_1+d_1\phi_2+\cdots d_{n+1}\phi_{n+2}=0.$$
   由 $\phi_1,\phi_2,\cdots\phi_{n+2}$ 的线性无关性, 即知 $d_i=0,i=1,2,\cdots n+1$, 故 $\phi_2-\phi_1,\cdots\phi_{n+2}-\phi_1$ 线性无关. 这与齐次方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 仅能有 n 个线性无关的解矛盾.

综合两点可说明该方程组有且至多有 $n+1$ 个线性无关解.

注

1. 部分同学只说明了 1、2 中的一点.
2. 本题中经典的错误是证明了 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 与 φ^* 的线性无关性, 即说明了结论, 然而 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 甚至不是非齐次方程的解.

✍ **练习 1.2(P173 5.1 T3)** 证明：向量组

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}$$

不可能同时满足任何一个三阶齐次线性微分方程组.

证明 考虑方程

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}=0.$$

则

$$c_1+c_2x+c_3x^2=0.$$

若 c_1,c_2,c_3 不全为 0, 该次数不超过 2 的方程在任意区间上不只有两个解, 矛盾. 因此该三个向量线性无关, 且均为三阶齐次方程的解, 故构成基本解组.

而

$$\begin{vmatrix}1&x&x^2\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0.$$

与该三个向量构成基本解组矛盾.

注

1. 部分同学的证明中出现了逻辑问题：$W=0$ 不能推出向量组的线性相关性, 而定理 5.3 中 $W=0$ 可以推出线性相关性建立在该向量组构成一个齐次方程的基解矩阵上, 证明中也用到了 Liouvile 定理. 而线性相关性推 $W=0$ 是容易的, 利用初等变换对矩阵行列式的改变即得. 我们来看下面的例子：

$$\begin{vmatrix}x^2&x|x|\\2x&2|x|\end{vmatrix}=0.$$

但是

$$\begin{pmatrix}x^2\\2x\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x|x|\\2|x|\end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{R}$ 上不线性相关, 由于 $x>0$ 时,

$$\begin{pmatrix}x^2\\2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x|x|\\2|x|\end{pmatrix}$$

而 $x<0$ 时,

$$\begin{pmatrix}x^2\\2x\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x|x|\\2|x|\end{pmatrix}$$

这实际上是不同区间上线性相关系数不同所引起的.

2. 对于本题还有别的想法：由于矩阵中 0 元素较多, 带入方程直接考察 $A(x)$ 第一列的性质也可以得出矛盾; 取方程初值为 $\boldsymbol{y}(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 时, 对于该初值三个向量组均为满足该初值的解, 与解的存在唯一性矛盾.

练习 1.3(P173 5.1 T4) 求解微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{t}x+1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}x+y.$$

解 第一个方程为仅关于 x 的一阶线性方程, 可计算得

$$x=c_1t^2-t.$$

带入第二个方程, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}(c_1t^2-t)+y.$$

可解得

$$y=-c_1t-c_1+1+c_2e^t.$$

故方程的解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}t^2\\-t-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}.$$

注

1. 对于系数不为常数的方程, 请勿使用神奇的特征值法.
2. 考试中过程应尽量完善, 对于类似本题较为简单的题目, 就算是一阶方程也最好写一些求解的核心步骤, 以免答案错了痛失过程分! 考试中解方程过程分一定会占一定的比重, 不然每个题直接写结果, 然后带入验证方程成立就完了显然是不合情合理的. 如果直接写出了基解矩阵, 注意验证 Wronsky 的非 0.
3. 对于变系数的二阶线性方程组, 若已知对应齐次方程的一个特解, 可以利用 Liouvile 方程求出另一个线性无关的特解, 即得到齐次方程的通解, 再用常数变易法求非齐次方程的特解, 进而给出该方程的通解. 如果特解不给的话需要根据方程的结构猜 (樂).

练习 1.4(P189 5.2 T1(4)(8)) 求解常系数矩阵线性齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=A\boldsymbol{y}$$

1. $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$

解 以下呈现了计算该类型方程必要的步骤, 考试中请不要省略.

1. $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -3 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5).$

该方程具有三个一重特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1+2i,\lambda_3=1-2i.$

(该两步务必不要算错, 有部分同学抄错了矩阵.)

对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2i\\1\\3\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-2i\\1\\3\end{pmatrix}.$

故基解矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & 2ie^{(1+2i)x} & -2ie^{(1-2i)x}\\ e^x & e^{(1+2i)x} & e^{(1-2i)x}\\ -e^x & 3e^{(1+2i)x} & 3e^{(1-2i)x}\end{pmatrix}.$

写基解矩阵的时候不要忘记乘 e 的次幂!

用实部虚部代替复值得到 $\Phi(x)=\begin{pmatrix}0 & -2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x\\ e^x & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x\\ -e^x & 3e^x\cos 2x & 3e^x\sin 2x\end{pmatrix}.$

(该步转换对于非齐次方程有极好的简化计算效果, 最终呈现的一定需要为实矩阵! 此时还应该注意解被替换为实部列和虚部列, 不要错位.)

则方程的通解为 $\boldsymbol{y}=\Phi(x)\cdot\boldsymbol{c}.$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意三维常值向量.

(该步骤也需要加上, 才算是完整给出了解的结构.)

2. $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3.$

该方程具有一个三重特征值 $\lambda=1.$

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^3=\mathbf{0}$$

取 $(A-I)^3X=0$ 的线性无关解为: $\xi_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_{20}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$

(这里的 ξ_{i0} 表示第 i 个向量 × 0 次矩阵 $A-\lambda I.$)

则 $\xi_{11}=(A-I)\xi_{10}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\xi_{21}=(A-I)\xi_{20}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\xi_{31}=(A-I)\xi_{30}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$

$\xi_{12}=(A-I)^2\xi_{10}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_{22}=(A-I)^2\xi_{20}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_{32}=(A-I)^2\xi_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$

故基解矩阵为 $\Phi(x)=e^x\begin{pmatrix}x+1 & -x & -x\\ 2x & -2x+1 & -2x\\ -x & x & x+1\end{pmatrix}.$

方程的通解为 $\boldsymbol{y}=\Phi(x)\cdot\boldsymbol{c}.$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意三维常值向量.

注 请严格遵守该解法, 部分同学使用了 Jordan 型直接求解矩阵 $e^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}x}\boldsymbol{P}^{-1}$, 由于基解矩阵在列变换下仍然为基解矩阵, 因此 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 可以直接忽略, 但 $\boldsymbol{P}$ 仍然是要算的. 该方法的计算量远大于定理 5.8 给出的算法, 且容易算错.

练习 1.5(P190 5.2 T2(1) T3(1)) 求解非齐次线性微分方程组

1. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + 2e^x, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y + e^x. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + \tan^2 x - 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -y + \tan x. \end{cases}$

解

1. 我们给出两种解法, (a) 由于该方程的特殊性, (b) 的解法是标准的.

   (a). 两个方程相加即得
$$\frac{\mathrm{d}(y+z)}{\mathrm{d}x} = y + z + 3e^x.$$
   解得
$$y + z = (3x + c_1)e^x.$$
   故
$$z = (3x + c_1)e^x - y.$$
   带入方程 1, 即得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3x + c_1)e^x - y + 2e^x.$$
   可以解得
$$y = \frac{c_1}{2}e^x + c_2e^{-x} + (\frac{3}{2}x + \frac{1}{4})e^x.$$
   则
$$z = \frac{c_1}{2}e^x - c_2e^{-x} + (\frac{3}{2}x - \frac{1}{4})e^x.$$
   故方程的解可以表示为
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{c} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{2}x + \frac{1}{4})e^x \\ (\frac{3}{2}x - \frac{1}{4})e^x \end{pmatrix}.$$
   其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意二维向量.

   (b). 考虑方程对应的齐次方程:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$
   记该矩阵为 A. $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

   该方程具有两个一重特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

   对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

故基解矩阵为 $\Phi(x)=\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x}\end{pmatrix}$, 则 $\Phi^{-1}(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x\end{pmatrix}$.

则此方程组的一个特解为 $\Phi^*=\Phi(x)\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-s} & e^{-s} \\ e^s & -e^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^s \\ e^s\end{pmatrix}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix} (\frac{3}{2}x+\frac{1}{4})e^x-\frac{1}{4}e^{-x} \\ (\frac{3}{2}x-\frac{1}{4})e^x+\frac{1}{4}e^{-x}\end{pmatrix}$.

在这里其实就是常数变易法! 请思考与高阶线性方程有什么异同.

故方程的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c}+\begin{pmatrix} (\frac{3}{2}x+\frac{1}{4})e^x \\ (\frac{3}{2}x-\frac{1}{4})e^x\end{pmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意二维向量.

在最后写解的时候也可以消去一些可以被基解消去的部分.

2. 考虑方程对应的齐次方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}.$$

记该矩阵为 A. $\det(\lambda I-A)=(\lambda+i)(\lambda-i)$.

该方程具有两个一重特征值 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$.

对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} i \\ -1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -i \\ -1\end{pmatrix}$.

故复的基解矩阵为 $\Phi(x)=\begin{pmatrix} ie^{ix} & -ie^{-ix} \\ -e^{ix} & -e^{-ix}\end{pmatrix}$.

实的基解矩阵为 $\Phi(x)=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x\end{pmatrix}$.

此处也可以对列乘某一个非零系数, 使其方便自己计算就行.

则 $\Phi^{-1}(x)=\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x\end{pmatrix}$.

则此方程组的一个特解为 $\Phi^*=\Phi(x)\displaystyle\int_0^x\begin{pmatrix} \sin s & \cos s \\ -\cos s & \sin s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tan^2 s-1 \\ \tan s\end{pmatrix}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix} \tan x \\ 2\end{pmatrix}$.

故方程的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c}+\begin{pmatrix} \tan x \\ 2\end{pmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 为任意二维向量.

注 对于给定初值的非齐次线性微分方程组的求解, 根据课本的定理 5.4, 此时通解的表达式为

$$\boldsymbol{y}(x)=\Phi(x)\big(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^x\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\big).$$

假设满足初值 $\boldsymbol{y}(x_0)=y_0$, 再上式中令 $x=x_0$, 则发现

$$\boldsymbol{c}=\Phi^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0.$$

因此此时方程的解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\Phi(x)\big(\Phi^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\int_{x_0}^x\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\big).$$

1.3.2 补充习题

例题 1.9(常系数线性微分方程组的周期性, 类似课本 P190 5.2 T4) 证明常系数线性微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 具有周期为 $\omega(\omega\neq 0)$ 的非零周期解的充要条件是 A 具有形如 $\frac{2k\pi}{\omega}i$ 的特征根, 其中 $k\in\mathbb{Z}$.

证明 由于方程的通解为 $\boldsymbol{y}=e^{Ax}\boldsymbol{c}$, 因此

$$\begin{aligned}
\exists\text{周期为}\,\omega\neq 0\,\text{的非零解}\ &\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{C}_0\neq \boldsymbol{0},\ \text{s.t.}\ e^{\boldsymbol{A}(x+\omega)}\boldsymbol{C}_0=e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{C}_0,\quad \forall x\\
&\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{C}_0\neq \boldsymbol{0},\ \text{s.t.}\ e^{\boldsymbol{A}x}(e^{\boldsymbol{A}\omega}-I)\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{0},\quad \forall x\\
&\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{C}_0\neq \boldsymbol{0},\ \text{s.t.}\ (e^{\boldsymbol{A}\omega}-I)\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{0},\quad \forall x\\
&\Leftrightarrow \det(e^{\boldsymbol{A}\omega}-I)=0\\
&\Leftrightarrow e^{\boldsymbol{A}\omega}-I\,\text{存在零特征值}\\
&\Leftrightarrow e^{\boldsymbol{A}\omega}\,\text{的某个特征值为}1.
\end{aligned}$$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $A\omega$ 的特征值, 则存在可逆阵 P, 使得 $A\omega=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$. 由上三角阵的乘积仍为上三角阵可得 $e^{A\omega}$ 的特征值为 $e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n}$. 所以

$$\begin{aligned}
\exists\text{周期为}\,\omega\neq 0\,\text{的非零解}\ &\Leftrightarrow \exists A\omega\,\text{的某一特征值}\,\lambda_j\ \text{s.t.}\ e^{\lambda_j}=1\\
&\Leftrightarrow \exists A\,\text{的某一特征值}\,\tilde{\lambda}_j=\frac{2k\pi i}{\omega}.
\end{aligned}$$

例题 1.10(基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组) 如果方程组 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ 与 $\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{y}$ 有一个相同的基解矩阵, 则 $A(x)\equiv B(x)$.

证明 设这个相同的基解矩阵为 $\Phi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}=A(x)\Phi=B(x)\Phi.$$

则

$$[A(x)-B(x)]\Phi\equiv 0.$$

由于 Φ 为基解矩阵, 则对任意的 x, 均有 $\Phi(x)$ 非奇异, 故对该 x 均有 $A(x)=B(x)$. 由于 x 的任意性, 有 $A(x)\equiv B(x)$.

例题 1.11(赵班, 20mid) 已知 $y=x$ 是方程 $y''+\dfrac{x}{1+x^2}y'-\dfrac{y}{1+x^2}=0$ 的解, 求该方程的通解.

解 这一类问题的解法是标准的.

设方程与 $y=x$ 线性无关的一个特解为 $\varphi(x)$, 则 $W(x)=\begin{vmatrix} x & \varphi\\ 1 & \varphi'\end{vmatrix}=c_1e^{-\int_0^x\frac{s}{1+s^2}\mathrm{d}s}$.

即

$$x\varphi'-\varphi=\frac{c_1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

为关于 φ 的一阶线性方程,

可以解得

$$\varphi(x)=-c_1\sqrt{1+x^2}+c_2x.$$

例题 1.12(赵班, 22mid) 已知 e^x 为方程

$$y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$$

的一个解, 利用常数变易法求方程

$$y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$$

的通解.

解 对于求齐次方程解的过程正如上例题所示, 可以求得齐次方程的通解为

$$\hat{y}=c_1x+c_2e^x.$$

令 $y=y_1, y'=y_2$, 则 $\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}e^x\\e^x\end{pmatrix}$ 为方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{1-x} & -\frac{x}{1-x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x-1\end{pmatrix}$ 的解.

令该方程有一个特解为 $\varphi^*=\begin{pmatrix}x & e^x\\1 & e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(x)\\c_2(x)\end{pmatrix}$,

带入方程有 $\begin{pmatrix}x & e^x\\1 & e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(x)\\c_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x-1\end{pmatrix}$. 因此 $c_1'(x)=-1, c_2'(x)=\frac{x}{e^x}$.

实际上用的是 cramer 法则.

则所求方程的解为 $\begin{pmatrix}x & e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x+c_1\\ \frac{-x-1}{e^x}+c_2\end{pmatrix}=c_1x+c_2e^x-x^2-x-1.$

例题 1.13(赵班, 20mid) 考虑方程 $y''+4y'+3y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续, 且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明: 方程的任意解 $y(x)$ 均成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

证明 齐次方程的线性无关解组为 $\{e^{-x},e^{-3x}\}$. 因此一个特解为

$$y(x)=\int_a^x\frac{e^{-s-3x}-e^{-x-3s}}{-2e^{-4s}}f(s)ds=\frac{1}{2}\int_a^x(e^{s-x}-e^{3(s-x)})f(s)ds.$$

注意到齐次方程的任一解 $Ae^{-x}+Be^{-3x}$ 在 $+\infty$ 处的极限均为零, 因此只需证明特解 $y(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

任取 $\varepsilon>0$, 则存在 $R>\max\{a,0\}$, 对任意 $x>R$, 成立 $|f(x)|<\varepsilon$; 另一方面, 由题设可得 $|f(x)|$ 在 $x\geqslant a$ 上有界, 设 $M\geqslant 0$ 为其上界. 由此可得 $x\geqslant R$ 时

$$\begin{aligned}
|y(x)|&\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_a^R+\int_R^x\right)|e^{s-x}-e^{3(s-x)}||f(s)|ds\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_a^R+\int_R^x\right)(e^{s-x}-e^{3(s-x)})|f(s)|ds\\
&<\frac{1}{2}\left(e^{R-x}-e^{a-x}-\frac{1}{3}e^{3(R-x)}+\frac{1}{3}e^{3(a-x)}\right)M+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-e^{R-x}+\frac{1}{3}e^{3(R-x)}\right)\varepsilon\\
&<\frac{1}{2}\left(e^{R-x}-e^{a-x}-\frac{1}{3}e^{3(R-x)}+\frac{1}{3}e^{3(a-x)}\right)M+\frac{1}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{R-x}-e^{a-x}-\frac{1}{3}e^{3(R-x)}+\frac{1}{3}e^{3(a-x)}\right)=0$.

则存在 x_0, 使得 $\forall x>x_0$, 有 $\left(e^{R-x}-e^{a-x}-\frac{1}{3}e^{3(R-x)}+\frac{1}{3}e^{3(a-x)}\right)<\frac{4\varepsilon}{3M}$.

对任意 $x>2\max\{x_0,R\}$, 成立 $|y(x)|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

例题 1.14(赵班, 21mid) 考虑线性方程 $y''+\alpha(t)y=0$, 其中 $\alpha(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 设 $\phi_1(t),\phi_2(t)$ 是两个线性无关的解, 且

$$\lim_{t\to+\infty}(|\phi_1(t)|+|\phi_1'(t)|)=0,$$

证明:

$$\lim_{t\to+\infty}(|\phi_2(t)|+|\phi_2'(t)|)=+\infty.$$

证明 令 $z=\dot{y}$, 则原线性方程化为一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \triangleq A(t)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

由 $\phi_1(t),\phi_2(t)$ 线性无关知 $(\phi_1(t),\phi_1'(t))^T,(\phi_2(t),\phi_2'(t))^T$ 是方程组的线性无关解.
由 Liouville 公式可得

$$W(t)=\phi_1(t)\phi_2'(t)-\phi_1'(t)\phi_2(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}=W(t_0)\triangleq C\neq 0.$$

由此可得

$$(|\phi_1(t)|+|\phi_1'(t)|)(|\phi_2(t)|+|\phi_2'(t)|)\geqslant |W(t)|=|C|>0.$$

结合 $|\phi_1(t)|+|\phi_1'(t)|\to 0$ 可得 $|\phi_2(t)|+|\phi_2'(t)|\to+\infty(t\to+\infty)$.

例题 1.15(赵班, 21mid) 求微分方程 $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$ 的通解.

解 这是 Euler 方程. 作变换 $t=\ln x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

代回方程可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=te^t.$$

1. 齐次方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0$ 的通解为 $y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$.
2. 非齐次方程的一个特解为 te^t.

综上可得方程通解为

$$y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)+te^t=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\ln x).$$

注 欧拉方程的解法也是标准的, 令 $x=e^t$, 规定 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则有

$$x^ny^{(n)}=D(D-1)\cdots(D-n+1)y.$$

即将方程转化为关于 t 的常系数高阶线性微分方程.

第 2 章 补充内容

2.1 扰动定理

定理 2.1 (扰动定理)

设 n 维向量值函数 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在 $(x,\boldsymbol{y})$ 空间内的某个开区域 G 上是连续的，而且对 $\boldsymbol{y}$ 满足局部 Lip-条件. 假设 $\boldsymbol{y}=\xi(x)$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}) \tag{2.1.1}$$

的一个解，令它的存在区间为 J. 现在，在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$，则存在常数 $\delta>0$，使得对任何初值 $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$，满足：

$$a\leqslant x_0\leqslant b,\ |\boldsymbol{y}_0-\xi(x_0)|\leqslant\delta,$$

柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}).\\ \boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0.\end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{y}=\varphi(x,x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 也至少在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在，并且在闭区域

$$D_\delta:\ a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant x_0\leqslant b,\ |\boldsymbol{y}_0-\xi(x_0)|\leqslant\delta$$

上是连续的. ♡

证明 该定理在课本中利用 picard 迭代证明，本处采用另一种办法证明（此证明中的 y 均表示向量，打起来方便一些）.

1. 设 f 在 G 上关于 y 全局 Lip.

   设以 (x_0,y_0) 为初值的解为 $y=y(x)$，令 $\eta(x)=y(x)-\xi(x)$，则 $\eta(x)$ 满足方程

   $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=f(x,y(x))-f(x,\xi(x))=f(x,\eta(x)+\xi(x))-f(x,\xi(x))=:g(x,\eta).\\ \eta(x_0)=y(x_0)-\xi(x_0)=y_0-\xi(x_0).\end{cases} \tag{2.1.2}$$

   $g(x,\eta)$ 具有如下性质：

   (a). 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $|\eta-\xi(x_0)|\leqslant\delta$ 上连续.

   (b). $|g(x,\eta)|\leqslant L|\eta|$. 由 f 的全局 Lip 条件即得.

   (c). $g(x,\eta)$ 关于 η 满足 Lip 条件，由于

   $$\begin{aligned}|g(x,\eta_1)-g(x,\eta_2)|&=|f(x,\eta_1(x)+\xi(x))-f(x,\xi(x))-f(x,\eta_2(x)+\xi(x))+f(x,\xi(x))|\\&\leqslant L|\eta_1(x)+\xi(x)-\eta_2(x)-\xi(x)|=L|\eta_1(x)-\eta_2(x)|.\end{aligned}$$

   故以 $(x_0,y_0-\xi(x_0))$ 为初值的方程 (2.1.2) 存在唯一解.

   由定理 3.5 结合性质 c 可知上述解可延拓到区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上.

   下面利用 Gronwall 的估计给出 δ 的存在性. 考察 η^2 满足的方程：

   $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta^2}{\mathrm{d}x}=2\eta\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}=2\eta g(x,\eta)\leqslant 2L\eta^2.\\ \eta^2(x_0)=|y_0-\xi(x_0)|^2.\end{cases} \tag{2.1.3}$$

对方程 (2.1.3) 利用 Gronwall 不等式即得

$$\eta^2(x) \leqslant e^{2L|x-x_0|}|y_0-\xi(x_0)|^2 \leqslant e^{2L|b-a|}|y_0-\xi(x_0)|^2.$$

故

$$|\eta(x)| \leqslant e^{L|b-a|}|y_0-\xi(x_0)|.$$

对 $\forall\,\sigma>0$，令 $\delta<e^{-L|b-a|}\frac{\sigma}{2}$，则当 $|y_0-\xi(x_0)|\leqslant\delta$ 时，

$$|\eta(x)| \leqslant e^{L|b-a|}|y_0-\xi(x_0)| \leqslant e^{L|b-a|}\delta<\sigma.$$

下面说明解对初值的连续依赖性，采用反证.

否则 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 关于 $(x_0,\ y_0)$ 不连续，即 $\exists\,\epsilon>0$, ξ_i，η_i，满足 $|(\xi_i,\eta_i)-(\xi_0,\eta_0)|<\frac{1}{i}$.

且 $\exists\,a\leqslant x_i\leqslant b$，使得 $|\varphi(x_i,\xi_i,\eta_i)-\varphi(x_i,\xi_0,\eta_0)|\geqslant\epsilon$.

取该点列的子列 x_i 收敛于 $\bar{x}\in[a,b]$.（此处为了方便后面证明将子列用 x_i 表示.）

引理 2.1 (Arzela-Ascoli)

$\{\varphi_i(x)\}$ 为一列有界闭区间 I 上的连续函数，满足：

(a). 一致有界：$|\varphi_i(x)|\leqslant k,\ \forall\,i,\ \forall\,x$

(b). 等度连续：$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta$，对 $\forall x_1,\ x_2\in I,\ |x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|\varphi_i(x_1)-|\varphi_i(x_2)|\leqslant\epsilon,\ \forall\,i$$

则 $\exists\,\{\varphi_{i_j}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

记 $\varphi(x,\xi_i,\eta_i)$ 为 $\varphi_i(x)$，验证 $Arzela-Ascoli$ 的条件：

(a). $\varphi_i(x)$ 满足微分方程，进而满足对应的积分方程

$$\varphi_i(x)=\eta_i+\int_{\xi_i}^{x} f(x,\varphi(x,\xi_i,\eta_i))\mathrm{d}x.$$

故

$$|\varphi_i(x)|\leqslant|\eta_i|+M|x-\xi_i|\leqslant|y_0|+1+M(b-a).$$

其中 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b,\ |y-\xi(x)|\leqslant\delta} f(x,y)$. 故一致有界.

(b). 注意到

$$|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(x,\xi_i,\eta_i))\mathrm{d}x\leqslant M|x_1-x_2|.$$

故等度连续.

由引理 4.1，存在 $\{\varphi_i(x)\}$ 的某个子列在 I 上一致收敛于 $\psi(x)$，满足：

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\psi(x))\mathrm{d}x.$$

与 $|\varphi_i(x_i)-\varphi_0(x_i)|\geqslant\epsilon$ 矛盾.

2. 回到 f 在 G 上局部 Lip 的情形.

引理 2.2 (有界闭集合中局部 Lip 和全局 Lip 的等价性)

G 为有界闭集合，则连续函数 f 满足局部 Lip 条件等价于满足全局 Lip 条件.

证明 证明请见第一次习题课讲义.

回到原命题的证明.

1 部分在证明 δ 的存在时，给出了对 $\forall\, \sigma > 0,\ \exists\, \delta > 0$，使得当 $|y_0 - \xi(x_0)| \leqslant \delta$ 时，有 $|y(x) - \xi(x)| \leqslant \sigma . y(x)$ 为初值为 y_0 的方程的解. 该表述表明，对任意的管状区域 Σ_σ，存在 δ 使得初值 y_0 与最初给定的解曲线在 x_0 处的差距小于 δ 时，可以使得以 y_0 为初值的解曲线完全落入该管状区域 Σ_σ 内. 下图为直观的展示. 黄色区域代表管状区域 Σ_σ.

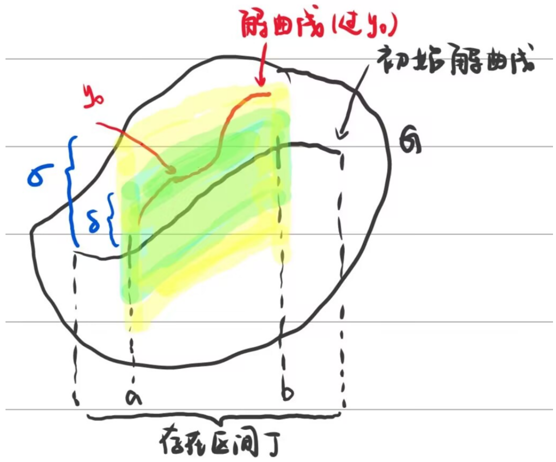

图 2.1: 扰动定理的直观图示

在给定 σ 与 a, b 的条件下，管状区域为一个紧集，在该紧集上满足局部 Lip 条件，由引理 2.2 知满足全局 Lip 条件，由 1 即完成命题的证明.

注 本证明中有几点耐人寻味：

1. "$\sigma - \delta$" 语言的使用，是本证明中较难理解的地方.
2. 在证明 δ 存在性时考虑 η^2 作为估计对象：由于我们只有对 $|\eta|$ 的估计，求导与绝对值不可换序.