微分方程引论第五次习题课讲义

助教：王鼎涵

2023 年 11 月 9 日

It's by logic that we prove, but by intuition we discover. –Henri Poincare

1 作业题

题目 P210 1 (4) 求解微分方程 $y'' + y = 4\sin x$。

解答 这是一个常系数二阶线性非齐次微分方程，首先求出齐次方程的通解 (齐次方程的解集构成 $\mathbb{R}^2$)。为此，写出特征方程

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

于是齐次方程的通解是

$$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

我们再求非齐次方程的一个特解。为此，猜测特解具有如下的形式

$$\phi(x) = x(a\cos x + b\sin x),$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 是待定的。将 $\phi(x)$ 带入原方程，注意到 $\phi(x)$ 中的后一项 $(a\cos x + b\sin x)$ 就是齐次方程的通解，根据 Leibniz 法则，$\frac{d^2}{dx^2}$ 作用在 $(a\cos x + b\sin x)$ 身上二阶导与 1 作用在 $\phi(x)$ 上得到的这两项一定消掉，而且对 x 求两次导为 0，所以只剩下对 x 和 $(a\cos x + b\sin x)$ 分别求一次导那一项，

$$2 \cdot (-a\sin x + b\cos x) = 4\sin x \implies a = -2,\ b = 0$$

于是得到特解 $\phi(x) = -2x\cos x$。综上，原方程的解为

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

题目 P210 1 (6) 求解微分方程 $y'' - 2y' + y = 6xe^x$。

解答 这是一个常系数二阶线性非齐次微分方程，首先求出齐次方程的通解。为此，写出特征方程

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1, 1$$

于是齐次方程的通解是

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

我们再求非齐次方程的一个特解。为此，猜测特解具有如下的形式

$$\phi(x) = x^2(a + bx)e^x,$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 是待定的。将 $\phi(x)$ 带入原方程，注意到 $\phi(x)$ 中的后一项 $(a+bx)e^x$ 就是齐次方程的通解，根据 Leibniz 法则，$\frac{d^2}{dx^2}$ 作用在 $(a+bx)e^x$ 上二阶导、$-2\frac{d}{dx}$ 作用在 $(a+bx)e^x$ 上一阶导与 1 作用在 $\phi(x)$ 上得到的这三项一定消掉，于是只剩下

$$2(a+bx)e^x+2\cdot 2x(e^x(a+bx+b))-2\cdot 2x(a+bx)e^x=6xe^x,$$

化简一下得到

$$(2a+6bx)e^x=6xe^x \implies a=0,b=1$$

于是得到特解 $\phi(x)=x^3e^x$。综上，原方程的解为

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^x+x^3e^x.$$

□

注记 (1) 能猜则猜，常数变易得到的解长得不一样。

(2) 不要化为方程组求解，正如计算 $2\times(-\sqrt{2})$ 不要回到 Dedekind 分割。

(3) 如果解中含有过多的参量，比如同时含有 C_1,C_2,x_0，则这个解不是通解，会被判定为错误。

(4) 练习：考虑方程 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$，其中 f 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ 上的实值连续函数，$x_0,y_0\in\mathbb{R}$，证明：若 $y(x)$ 是方程的解，那么 $y(x)$ 是实值函数。

题目 P210 2 (3) 利用常数变易法求解微分方程 $y''-y=x^{-1}-2x^{-3}$。

解答 这是一个常系数二阶线性非齐次微分方程，首先求出齐次方程的通解。为此，写出特征方程

$$\lambda^2-1=0 \implies \lambda=\pm 1$$

于是齐次方程的通解是

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

我们再求非齐次方程的一个特解。为此，我们使用常数变易法，设特解具有如下的形式

$$\phi(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x},$$

其中 $C_1(x),C_2(x)$ 是两个待定的 C^2 函数。对 $\phi(x)$ 求一次导数，得到

$$\phi'(x)=C_1(x)e^x-C_2(x)e^{-x}+C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{-x}.$$

我们令

$$C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{-x}=0. \tag{1}$$

于是

$$\phi''(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x}+C_1'(x)e^x-C_2'(x)e^{-x}.$$

带入方程，得到

$$C_1'(x)e^x-C_2'(x)e^{-x}=x^{-1}-2x^{-3}. \tag{2}$$

联立 (1) 和 (2) 得到下面的方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{-x}=0, \\ C_1'(x)e^x-C_2'(x)e^{-x}=x^{-1}-2x^{-3}. \end{cases}$$

整理一下得到

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}(x^{-1} - 2x^{-3}), \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x}(2x^{-3} - x^{-1}). \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1(x) = c_1 + \displaystyle\int_{+\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-s}(s^{-1} - 2s^{-3})\ ds = c_1 + \frac{1}{2}e^{-x}(-x^{-1} + x^{-2})|_{\infty}^{x} = c_1 + \frac{1}{2}e^{-x}(-x^{-1} + x^{-2}), \\ C_2(x) = c_2 + \displaystyle\int_{+\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{s}(2s^{-3} - s^{-1})\ ds = c_2 - \frac{1}{2}e^{x}(x^{-1} + x^{-2})|_{\infty}^{x} = c_2 - \frac{1}{2}e^{x}(x^{-1} + x^{-2}). \end{cases}$$

综上，原方程的解为

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}(-x^{-1} + x^{-2}) - \frac{1}{2}(x^{-1} + x^{-2}) \\ &= c_1e^x + c_2e^{-x} - x^{-1}. \end{aligned}$$

□

题目 P211 5　考虑微分方程 $y'' + y = 0$。设 $y = c(x)$ 和 $y = s(x)$ 分别是该方程满足初始条件

$$c(0) = 1, \quad c'(0) = 0$$

和

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

的解。不求解微分方程，请证明：

(1) $c(x)$ 是偶函数，$s(x)$ 是奇函数；

(2) $s^2(x) + c^2(x) \equiv 1$；

(3) $s(\alpha + \beta) = s(\alpha)c(\beta) + s(\beta)c(\alpha)$；

(4) 如果 τ 是 $c(x)$ 在 $x > 0$ 上的第一个零点，则 $c(x)$ 和 $s(x)$ 均是以 4τ 为周期的。

解答　(1) 显然如果 $y(x)$ 是方程的解，那么 $y(-x)$ 也是，再根据线性就知道 $y(x) \pm y(-x)$ 也是方程的解。特别的 $c(x) - c(-x)$ 是初值为 $c(0) - c(-0) = 0$，导数初值为 $c'(0) - c'(-0) = 0$ 的解，根据唯一性定理，$c(x) - c(-x) \equiv 0$，即 $c(x)$ 是偶函数。类似地，$s(x) + s(-x)$ 是初值为 $s(0) + s(-0) = 0$，导数初值为 $s'(0) - s'(-0) = 0$ 的解，根据唯一性定理，$s(x) + s(-x) \equiv 0$，即 $s(x)$ 是奇函数。

(2) 我们证明下面关键的两件事

$$c'(x) = -s(x),\ s'(x) = c(x).$$

这是因为首先方程 $y'' + y = 0$ 的解 $y(x)$ 一定是光滑的，在方程两边求导便知道 $y'(x)$ 也是方程的解。特别的，$-c'(x)$ 是初值为 $-c'(0) = 0$，导数初值为 $-c''(0) = c(0) = 1$ 的解，根据唯一性定理 $-c'(x) = s(x)$。另一个式子是类似的。

回到原题，我们令 $e(x) = s^2(x) + c^2(x)$。计算导数 $e'(x) = 2(s(x)s'(x) + c(x)c'(x)) = 2(s(x)c(x) - c(x)s(x)) = 0$，再结合 $e(0) = s^2(0) + c^2(0) = 1$ 便得到 $e(x) \equiv 1$。

(3) 注意到 $s(x + \beta)$ 也是方程的解，初值为 $s(0 + \beta) = s(\beta)$，导数初值为 $s'(0 + \beta) = c(\beta)$。根据线性，$s(x)c(\beta) + s(\beta)c(x)$ 也是方程的解，初值为 $s(0)c(\beta) + s(\beta)c(0) = s(\beta)$，导数初值为 $s'(0)c(\beta) + s(\beta)c'(0) = c(0)c(\beta) - s(\beta)s(0) = c(\beta)$，根据唯一性定理 $s(x + \beta) = s(x)c(\beta) + s(\beta)c(x)$，把 x 改写成 α 就得到了想要的结果。

(4) 在 (3) 中得到了 $s(x+\beta)=s(x)c(\beta)+s(\beta)c(x)$，求导数并把 x 改写为 α 便得到 $c(\alpha+\beta)=c(\alpha)c(\beta)-s(\beta)s(\alpha)$。于是可以计算 $c(x+\tau)=c(x)c(\tau)-s(x)s(\tau)=-s(x)s(\tau)$，接着算 $c(x+2\tau)=-s(x+\tau)s(\tau)=-c(x)s^2(\tau)=-c(x)$，于是便得到了 $c(x+4\tau)=c(x)$，即 $c(x)$ 以 4τ 为周期。再注意到 $s(x)=-c'(x)$ 就知道 $s(x)$ 也以 4τ 为周期。 □

注记 (1) 光滑函数的 Taylor 展开未必收敛到原函数，经典反例是 e^{-1/x^2}。但是在不求解方程的前提下我们能够知道 $y''+y=0$ 的解是解析的 (可以尝试证明这一点)，于是如果 $y(0)=y'(0)=0$，那么根据 $y''=-y\in C^2(\mathbb{R})$ 易知 $y^{(n)}(0)=0$，所以 $y(x)\equiv 0$。不过，我们没有必要走到解析的范畴里，因为在光滑范畴里利用唯一性定理就可以了。

(2) 不求解微分方程，请证明：(4) 中所述的 τ 是存在的。于是我们可以定义

定义 1 我们定义**圆周率**为微分方程 $y''+y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的唯一解 $c(x)$ 在 $x>0$ 上的第一个零点 τ 的两倍，记为 π，即 $\pi=2\tau$。

下面是一些有趣/无聊的小练习，感兴趣的同学可以完成。

证明：在 *Lebesgue* 测度下，$\mathbb{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^2$ 的测度为 π。

证明：$\mathbf{S}^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$ 的子流形测度为 2π。

从这里我们可以大致看到，即便是圆周率这样的小学生都习以为常的概念在现代分析学中也不是平凡的，甚至从某种另类的意义上讲，微积分理论的发展的一个目的就是证明“圆周率是 π”。

题目 P331 6 证明：如果齐次线性微分方程组 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的每个解当 $t\to+\infty$ 时都有界，则其零解是 Lyapunov 正向稳定的；如果每个解在 $t\to+\infty$ 趋向于零，则其零解是 Lyapunov 正向渐进稳定的。

解答 设方程的基解矩阵为 $\mathbf{\Phi}(t)$，不妨假设 $\mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I}$。根据题意，存在 $M>0$ 使得 $\|\mathbf{\Phi}(t)\|\leqslant M$，对任意的 $t\geqslant 0$。于是以 $\mathbf{x_0}$ 出发的解为 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x_0}$，满足 $|\mathbf{x}(t)|\leqslant\|\mathbf{\Phi}(t)\||\mathbf{x_0}|\leqslant M\mathbf{x_0}$，对任意的 $t\geqslant 0$。可见零解是正向稳定的。倘若更进一步，每个解都在 $t\to+\infty$ 时趋于零，那么 $\|\mathbf{\Phi}(t)\|\to 0$，于是 $|\mathbf{x}(t)|\to 0$，可见零解是正向渐进稳定的。 □

题目 P331 7 证明：如果齐次线性微分方程组 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 至少有一个当 $t\to+\infty$ 时无界的解，则其零解不是 Lyapunov 正向稳定的。

解答 假设那个当 $t\to+\infty$ 时无界的解为 $\mathbf{x}(t)$，我们有 $|\mathbf{x}(t)|\to\infty$，当 $t\to+\infty$。根据线性，对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\lambda\mathbf{x}(t)$ 也是方程的当 $t\to\infty$ 时无界的解，取 λ 非常小，可见零解不是 Lyapunov 正向稳定的。 □

题目 P331 8 考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}(t)x+a_{12}(t)y,\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}(t)x+a_{22}(t)y.\end{cases}$$

假设

$$\lim_{t\to+\infty}(a_{11}(t)+a_{12}(t))=b>0.$$

证明：该方程的零解不是 Lyapunov 正向稳定的。

解答 设方程的一组基解是 $\phi_1(t),\phi_2(t)$，则 Wronsky 行列式 $W(\phi_1,\phi_2)(0)\neq 0$。根据 Liouville 公式，得到

$$W(\phi_1,\phi_2)(t)=W(\phi_1,\phi_2)(0)e^{\int_0^t a_{11}(s)+a_{22}(s)\ ds}\to\infty,$$

说明至少 $\phi_1(t), \phi_2(t)$ 中的一个是当 $t \to +\infty$ 时无界的，根据上一题知零解不是 Lyapunov 正向稳定的。 □

注记 (1) 总结一下，对于有限维的线性方程组，我们有

零解稳定 $\iff$ 每个解都有界 $\iff$ 一组基解有界，

零解渐近稳定 $\iff$ 每个解都趋于 0 $\iff$ 一组基解趋于 0。

(2) 什么样的方程组是“无限维”的？对于无限维的情形上面的结论还对吗？

(3) 如果方程线性部分的矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 与 t 有关，则不能使用特征值来判断稳定性。非自治系统不能使用 Lyapunov 第二方法。

题目 P331 4 研究微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -1 + x^2 \end{cases}$$

的奇点的 Lyapunov 稳定性。

解答 首先计算奇点，令 $y = 0$ 且 $-1 + x^2 = 0$，得到两个奇点 $(\pm 1, 0)$，下面分别讨论他们的稳定性。

对于奇点 $(1, 0)$，做换元 $\tilde{x} = x - 1$, $\tilde{y} = y$，原方程化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}, \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x}^2 + 2\tilde{x}. \end{cases}$$

这样我们只要考虑零解的稳定性。线性化后得到的矩阵是常数矩阵，特征值是 $\pm\sqrt{2}$，于是原方程 $(1, 0)$ 这个奇点是不稳定的。

对于奇点 $(-1, 0)$，做换元 $\tilde{x} = x + 1$, $\tilde{y} = y$，原方程化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}, \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x}^2 - 2\tilde{x}. \end{cases}$$

这样我们只要考虑零解的稳定性。线性化后得到的矩阵是常数矩阵，特征值是 $\pm\sqrt{2}i$，即使这两个特征值对应 Jordan 块是 1 阶的也无法判断原方程的稳定性！下面考虑使用 Lyapunov 第二方法。首先把方程化为二阶方程

$$\tilde{x}'' = \tilde{x}^2 - 2\tilde{x},$$

在方程两边乘上 $\tilde{x}'$，得到

$$\tilde{x}'\tilde{x}'' = \tilde{x}^2\tilde{x}' - 2\tilde{x}\tilde{x}',$$

注意到 $\tilde{x}'\tilde{x}'' = \left(\frac{1}{2}(\tilde{x}')^2\right)'$，$\tilde{x}^2\tilde{x}' = \left(\frac{1}{3}\tilde{x}^3\right)'$，以及 $2\tilde{x}\tilde{x}' = (\tilde{x}^2)'$，上式化为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\tilde{x}')^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \tilde{x}^2\right) = 0,$$

这表明 $\frac{1}{2}(\tilde{x}')^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \tilde{x}^2$ 应该是我们追寻的 Lyapunov 函数。转化到原方程，我们令

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\tilde{y}^2 - \frac{1}{3}\tilde{x}^3 + \tilde{x}^2,$$

它在 $(0,0)$ 的某个邻域中正定 (因为三次方项是高阶无穷小)，并且 $V^*(x,y)=\tilde{y}(\tilde{x}^2-2\tilde{x})-\tilde{x}^2\tilde{y}+2\tilde{x}\tilde{y}=0$，这说明零解是正向稳定的。同时这也说明零解不是正向渐近稳定的，这是因为对于从任意的 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 出发的解 $\phi(t)$，$V(\phi(t))$ 保持不变且不为 0，所以 $\phi(t)$ 不会趋于 (0,0)。 □

注记 (1) 这样转化为二阶方程，并且在方程两边乘上某个东西再化为全微分的方法只在特定的情况下奏效，不过在偏微分方程中我们也会用类似的技巧来构造一个偏微分方程的能量。

(2) 如果只能判断出 V^* 在零点的一个空心邻域内 $\leqslant 0$，则不能说明渐近稳定。如果 V^* 在零点的任意一个空心邻域内都有零点也不能说明零解不是渐近稳定。

(3) 如果没有特别说明，稳定性一定要判断到是否渐进稳定。

题目 P331 5 (1) 讨论以下微分方程组的零解的 Lyapunov 稳定性：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-xy^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-x^4y.\end{cases}$$

解答 线性化后得到的线性部分矩阵特征值为 $\pm i$，所以无法判断原方程零解的稳定性。下面考虑 Lyapunov 第二方法。令

$$V(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2,$$

它在零点的邻域内正定，并且 $V^*(x,y)=x(-y-xy^2)+y(x-x^4y)=-x^2y^2-x^4y^2$ 在零点的空心邻域内 $\leqslant 0$，于是零解是正向稳定的。

下面我们证明，零解还是正向渐近稳定的，事实上我们证明下面这个更强的结论：对于任意的 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，从 (x_0,y_0) 出发的解 $\phi(t;x_0,y_0)\to 0$，当 $t\to+\infty$。我们用反证法，假设 $\phi(t;x_0,y_0)$ 不趋于零，由于 $V^*(\phi(t;x_0,y_0))\leqslant 0$, $|\phi(t;x_0,y_0)|\leqslant|\phi(0;x_0,y_0)|$，对任意的 $t\geqslant 0$。我们记 $r=|(x_0,y_0)|$，那么一定存在 $(x_1,y_1)\in\overline{B(0,r)}-\{0\}$，以及一个递增的时间序列 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$，使得 $t_n\to+\infty$ 并且 $\phi(t_n;x_0,y_0)\to(x_1,y_1)$ (这里利用了 $\overline{B(0,r)}$ 的紧性)。根据连续性可知 $V(\phi(t_n;x_0,y_0))\to V(x_1,y_1)$。考虑到 $V(\phi(t;x_0,y_0))$ 是单调递减的，实际上可以得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(\phi(t;x_0,y_0))=V(x_1,y_1)$。下面我们声称：从 (x_1,y_1) 出发的解 $\phi(t;x_1,y_1)=(x(t),y(t))$ 满足 $V(\phi(t;x_1,y_1))\equiv V(x_1,y_1)$，即沿着解 V 是常数。事实上，由于 $\phi(t_n;x_0,y_0)\to(x_1,y_1)=\phi(0;x_1,y_1)$，根据解对初值的连续依赖性，我们得到对于任意的 $t\geqslant 0$, $\phi(t_n+t;x_0,y_0)\to\phi(t;x_1,y_1)$，于是 $V(\phi(t;x_1,y_1))=\lim\limits_{n\to\infty}V(\phi(t_n+t;x_0,y_0))=V(x_1,y_1)$。然而这表明 $V^*(\phi(t;x_1,y_1))=-x^2(t)y^2(t)(1+x^2(t))\equiv 0$，即 $x(t)y(t)\equiv 0$。对这个式子求导，得到

$$x'(t)y(t)+x(t)y'(t)=-y^2(t)-x(t)y^3(t)+x^2(t)-x^5(t)y(t)\equiv 0,$$

于是 $x^2(t)-y^2(t)\equiv 0$，再结合 $x(t)y(t)\equiv 0$ 就得到 $(x(t),y(t))\equiv(0,0)$，而这与假设 $(x(0),y(0))=(x_1,y_1)\neq(0,0)$ 相矛盾！综上，该方程组的零解是渐近稳定的。 □

注记 实际上我们证明了所谓 Lasalle 不变性原理，使用的技巧主要是去分析解的极限点集合的行为。研究解的极限集是微分动力系统中很基本的技术，值得一提的是，Poincare-Bendixson 定理事实上确定了平面动力系统的所有可能的极限性态，感兴趣的同学可以学习。

2 习题课

例题 1 自治系统的稳定性

(1) (Lienard 方程) 设 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 C^1 函数，且 $g(0)=0$, $xg(x)>0$。证明：微分方程

$$x''+x'+g(x)=0$$

的零解是渐进稳定的。

解答 首先将方程化为方程组

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=-g(x_1)-x_2 \end{cases}$$

自然先尝试构造

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}g(t)dt,$$

显然该函数在 0 的邻域内正定。下面计算

$$V^*(x_1,x_2)=g(x_1)x_2+x_2(-g(x_1)-x_2)=-x_2^2\leqslant 0,$$

于是零解是稳定的。不过上面的计算得不到渐近稳定的结论，我们改用如下的 Lyapunov 函数

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}g(t)dt+cg(x_1)x_2,$$

其中 $c>0$ 是一个待定的参数。(这种在原先 $\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}g(t)dt$ 的基础上补上一项“交叉项”

$$\left(\frac{1}{2}x_2^2\right)'\left(\int_0^{x_1}g(t)dt\right)'=x_2g(x_1)$$

的方法是常用的。) 此时我们有

$$V(x_1,x_2)\geqslant\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}g(t)dt-\frac{c}{2}g(x_1)^2-\frac{c}{2}x_2^2,$$

再考虑到

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)^2}{\int_0^x g(t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{2g(x)g'(x)}{g(x)}=2g'(0),$$

于是存在常数 $M>0$，使得在 0 附近有 $|g'(x_1)|\leqslant M$，并且

$$g(x)^2\leqslant M\int_0^x g(s)ds.$$

于是

$$V(x_1,x_2)\geqslant\frac{1-c}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}g(t)dt\left(1-\frac{c}{2}M\right),$$

为了使得 V 在 0 附近正定，只需要 $0<c<\min\{1,\frac{2}{M}\}$。下面计算

$$\begin{aligned} V^*(x_1,x_2)&=(g(x_1)+cg'(x_1)x_2)x_2+(x_2+cg(x_1))(-g(x_1)-x_2) \\ &=(-1+cg'(x_1))x_2^2-cg^2(x_1)-cg(x_1)x_2 \\ &\leqslant(-1+cM)x_2^2-cg^2(x_1)-cg(x_1)x_2 \\ &\leqslant(-1+cM)x_2^2-cg^2(x_1)+\frac{c}{2}g^2(x_1)+\frac{c}{2}x_2^2 \\ &=\left(-1+cM+\frac{c}{2}\right)x_2^2-\frac{c}{2}g^2(x_1). \end{aligned}$$

于是取 $c>0$ 使得 $cM+\frac{c}{2}<1$ 即可使得

$$V^*(x_1,x_2)<0,\ (x_1,x_2)\neq(0,0),$$

可见零解是渐近稳定的。 □

(2) (2022 年期中考试) 通过构造 Lyapunov 函数讨论方程

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

的零解的稳定性。

解答 在上一题中取 $g(y) = y^3$ 即可。 □

(3) (2021 年期中考试) 分析系统

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性。

解答 考虑 $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 即可。 □

(4) (2020 年期中考试) 讨论方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = (\varepsilon x + 4y)(z + 1) \\ \dot{y} = (-x + \varepsilon y)(z + 1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

零解的稳定性。

解答 首先尝试线性近似，近似后的方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x + 4y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

对应矩阵的特征值是 $\varepsilon + 2i$, $\varepsilon - 2i$, 0。于是如果 $\varepsilon > 0$，零解是不稳定的。

对于 $\varepsilon \leqslant 0$ 的情况，线性近似就没用了，于是考虑 Lyapunov 第二方法，我们待定如下形式的的 Lyapunov 函数

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

取 $a, b, c > 0$ 即可保证正定性。下面计算

$$\begin{aligned} V^*(x, y, z) &= 2ax(\varepsilon x + 4y)(z + 1) + 2by(-x + \varepsilon y)(z + 1) + 2cz(-z^3) \\ &= 2a\varepsilon(z + 1)x^2 + 2b\varepsilon(z + 1)y^2 - 2cz^4 + (8a - 2b)xy(z + 1). \end{aligned}$$

可见如果 $\varepsilon < 0$，并且取 $8a = 2b$，就使得 V^* 在 0 的空心邻域 $\{z > -1\} - \{0\}$ 内小于 0，于是零解是渐近稳定的。

最后对于 $\varepsilon = 0$ 的情况，上面的计算只能告诉我们零解是稳定的，而无法判断是否渐近稳定，我们要单独处理。重写方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(z + 1) \\ \dot{y} = -x(z + 1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

于是考虑如下的函数

$$V(x,y,z) = x^2 + 4y^2.$$

虽然它不满足在 0 附近正定，但也没关系，因为

$$V^*(x,y,z) = 2x \cdot 4y(z+1) + 8y \cdot (-x(z+1)) = 0,$$

所以从任意 $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ 出发的解都不会趋于 0，从而此时零解不是渐近稳定的。 □

例题 2 非自治系统的稳定性

(1) (2022 年期中考试) 设常数 $a > 0$，$f(t,y)$ 和 $\partial f/\partial y$ 关于 (t,y) 在 $0 \le t < \infty, |y| < k$ 上是连续的，k 是一个常数。并且 f 关于 $0 \le t < \infty$ 一致成立下列极限

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{|f(t,y)|}{|y|} = 0.$$

设 $b(t)$ 关于 $0 \le t < \infty$ 连续，并且 $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = 0$，如果 t_0 充分大，证明：存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $|y_0| < \delta$，微分方程

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b(t)y + f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

的解 $y = y(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上存在，并且始终满足

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0.$$

解答 取充分大的 t_0，使得对于任意的 $t \geqslant t_0$，$|b(t)| < \frac{a}{3}$。由于 $\lim\limits_{|y|\to 0} \frac{|f(t,y)|}{|y|} = 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $|y| < \delta$，以及任意的 $t \geqslant 0$，有 $|f(t,y)| \leqslant \frac{a}{3}|y|$。现在考虑方程以 $y(t_0) = y_0$ (其中 $|y_0| < \delta$) 为初值的解 $y = y(t)$，在存在区间 (且 $|y(t)| < \delta$ 的时间) 上，它满足

$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + b(t)y(t) + f(t, y(t)),$$

与之等价的是

$$e^{at}y(t) = e^{at_0}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{as}\left(b(s)y(s) + f(s, y(s))\right) ds,$$

于是

$$e^{at}|y(t)| \leqslant e^{at_0}|y_0| + \int_{t_0}^{t} e^{as}\left(\frac{a}{3}|y(s)| + \frac{a}{3}|y(s)|\right) ds,$$

根据 Gronwall 不等式，

$$e^{at}|y(t)| \leqslant e^{at_0}|y_0| e^{\frac{2}{3}a(t-t_0)},$$

即

$$|y(t)| \leqslant e^{a(t_0-t)}|y_0| e^{\frac{2}{3}a(t-t_0)} = |y_0| e^{\frac{1}{3}a(t_0-t)}.$$

由此可见 $y(t)$ 实际上在 $[t_0, \infty)$ 上存在，并且始终满足 $|y(t)| < \delta$。 □

(2) 设 n 阶常数矩阵 A 的所有特征值的实部都小于 α，设 $\mathbf{g}(t,\mathbf{y})$ 是一个 $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ 上的 (向量值) 连续函数，并且满足

$$|\mathbf{g}(t,\mathbf{y})| \leqslant h(t)|\mathbf{y}|,$$

其中 $h(t)$ 是一个 $[0,\infty)$ 上的连续函数。证明：方程

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t,\mathbf{y})$$

的任一解 $\mathbf{y}(t)$ 满足估计

$$|\mathbf{y}(t)| \leqslant C|\mathbf{y}(0)|e^{\alpha t+CH(t)},$$

其中 $H(t)=\int_0^t h(s)ds$，$C>0$ 是一个与解 $\mathbf{y}(t)$ 无关的常数。

解答 首先，由于 A 的所有特征值都小于 α，所以存在 $C>0$，使得对任意的 $t\geqslant 0$，有

$$\|\mathbf{e}^{At}\| \leqslant Ce^{\alpha}t.$$

接下来我们的目标还是把方程转化为积分方程之后使用绝对值不等式做估计，然后用 Gronwall 不等式得到结果。

$$(\mathbf{e}^{-At}\mathbf{y})' = \mathbf{e}^{-At}(\mathbf{y}'-A\mathbf{y}) = \mathbf{e}^{-At}\mathbf{g}(t,\mathbf{y}),$$

于是化为积分方程

$$\mathbf{e}^{At}\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{-As}\mathbf{g}(s,\mathbf{y}(s))ds.$$

注意我们不能直接在这一步取绝对值，要先化为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}^{At}\mathbf{y}(0) + \int_0^t \mathbf{e}^{A(t-s)}\mathbf{g}(s,\mathbf{y}(s))ds.$$

利用绝对值不等式，得到

$$|\mathbf{y}(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}|\mathbf{y}(0)| + \int_0^t Ce^{\alpha(t-s)}h(s)|\mathbf{y}(s)|ds.$$

为了利用 Gronwall 不等式，把 $e^{\alpha t}$ 除到等式左边，得到

$$e^{-\alpha t}|\mathbf{y}(t)| \leqslant C|\mathbf{y}(0)| + \int_0^t Ch(s)(e^{-\alpha s}|\mathbf{y}(s)|)ds.$$

使用 Gronwall 不等式，得到

$$e^{-\alpha t}|\mathbf{y}(t)| \leqslant C|\mathbf{y}(0)|e^{H(t)},$$

即

$$|\mathbf{y}(t)| \leqslant C|\mathbf{y}(0)|e^{\alpha t+H(t)}.$$

□

(3) (2021 年期中考试) 设 n 阶常数矩阵 A 的所有特征值都有负的实部，n 阶矩阵 $B(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，且满足

$$\int_0^\infty \|B(t)-A\|dt < \infty.$$

证明：方程组

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x$$

的零解是渐近稳定的。

解答 取 $g(t,x)=(B(t)-A)x$，$h(t)=\|B(t)-A\|$，利用上一题的结果得到

$$|x(t)| \leqslant C|x(0)|e^{\alpha t+H(t)}.$$

注意到 $\alpha<0$ 并且 $H(t)$ 是有界的，所以 $x(t)\to 0$。 □

例题 3 平面线性系统的动力学分类

本题中，我们考虑的方程为 $\mathbb{R}^2$ 上的线性方程

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其中 $A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ 是一个常数矩阵，我们一般简记为 $X' = AX$。根据常微分方程的基本理论，我们知道这样方程 Cauchy 问题的解在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一 (换句话说，向量场 $X(p) = A \cdot p$ 是完备的)，并且它的流

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p) = \phi_t(p)$$

是光滑映射。

为了对所有这样的系统进行分类，我们要指明容许的变换，为此引入下面的定义。

定义 2 设 A, B 是两个平面 *(自治)* 动力系统，Φ^A, Φ^B 是他们对应的流，如果存在 $\mathbb{R}^2$ 的自同胚 h，使得对任意的 $p \in \mathbb{R}^2$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$h(\Phi^A(t, p)) = \Phi^B(t, h(p)),$$

那么则称 A, B 是 *(***拓扑***)* **共轭的**，称上面的 h 为**从** A **到** B **的共轭**。

很明显，如果 h 是从 A 到 B 的共轭，那么 h^{-1} 是从 B 到 A 的共轭。共轭是所有平面动力系统上的一个等价关系，从而它们可以被分为若干共轭类。请注意，我们这里只是要求 h 是同胚，而不是微分同胚，否则我们将会看到，在微分同胚下的共轭类太多 (比如星形节点与两项节点不是微分同胚的，而星形节点与焦点是同胚的！)

(1) 证明：对于某个系统 A，ϕ_t^A 是一个从 A 到 A 的共轭。

(2) 证明：如果 h 是从 A 到 B 的共轭，那么 h^{-1} 是从 B 到 A 的共轭。

(3) 证明：共轭是所有平面动力系统上的一个等价关系。

(4) 考虑两个一维的系统

$$x' = \lambda_1 x, \qquad x' = \lambda_2 x,$$

记它们对应的流为 Φ^1 和 Φ^2。证明：如果 λ_1 和 λ_2 同号且非零，那么这两个系统是共轭的。

(5) 证明：对于两个矩阵 A, $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$，如果存在 $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$，使得 $PAP^{-1} = B$，那么系统 $X' = AX$ 和 $X' = BX$ 是共轭的。

(6) 证明：如果 A, $B \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ 的特征值均一正一负，那么系统 $X' = AX$ 和 $X' = BX$ 是共轭的。(提示：根据 (5) 的结论，我们可以化到实相似标准型上考虑。)

(7) 证明：如果矩阵 A 有两个实部为负的特征值，那么 A 必然 (实) 相似于如下三种 (实) 矩阵之一

$$(a)\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

其中，α, λ, $\mu < 0$。接下来，我们首先证明 (a), (b) 两种情形都是共轭的。为此，令

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

我们证明 (a), (b) 两种情况均与系统 $X' = BX$ 共轭，而且它们之间也共轭。

(8) 设 $n(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ 是单位圆 $\mathbf{S}^1$ 上的外法向量场。证明：当 A 为 (a), (b) 两种情形时，向量场 $X(p) = A \cdot p$ 在 $\mathbf{S}^1$ 上均是指向单位圆内的，即 $X(p) \cdot n(p) < 0$ 对任意的 $p \in \mathbf{S}^1$。

(9) 证明：当 A 为 (a), (b) 两种情形时，对任意的初始位置 $p\in\mathbb{R}^2$，存在唯一的 $t\in\mathbb{R}$，使得

$$\phi_t^A(p)\in\mathbf{S}^1.$$

(10) 令 A 为 (a), (b) 两种情形之一，对于系统 $X'=AX$，定义

$$\tau^A:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto\tau^A(x,y),$$

其中 $\tau^A(x,y)$ 是从 (x,y) 出发到达 $\mathbf{S}^1$ 的时间，即唯一的那个 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $\phi^A_{\tau^A(x,y)}\in\mathbf{S}^1$。证明：$\tau^A$ 是连续的。(提示：使用隐函数定理。)

有了上面的准备，下面我们具体构造从系统 $X'=AX$ 到 $X'=BX$ 的共轭。

(11) 定义如下的映射

$$H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto\phi^B_{-\tau^A(x,y)}(\phi^A_{\tau^A(x,y)}(x,y)),$$

当然，这里的定义要求 $(x,y)\neq(0,0)$，我们补充定义 $H(0,0)=(0,0)$。证明：H 是从系统 $X'=AX$ 到 $X'=BX$ 的共轭。

(12) 如果 A 是情形 (c) 中的矩阵，证明：对任意的 $\varepsilon>0$，A 实相似于

$$\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\0&1\end{pmatrix}.$$

(13) 证明：对于充分小的 $\varepsilon>0$，向量场

$$X(p)=\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\0&1\end{pmatrix}\cdot p$$

在 $\mathbf{S}^1$ 上也指向单位圆的内部，从而证明如果 A 实相似于情形 (c) 中的矩阵，那么 $X'=AX$ 也与 $X'=BX$ 共轭。

通过在方程两边同时加负号，以上的证明过程对于 A 具有两个正实部特征值的情形同样成立。于是，我们证明了：具有两个正实部的特征值的平面线性系统相互共轭、具有两个负实部的特征值的平面线性系统相互共轭、具有一正一负特征值的平面线性系统相互共轭。下面我们继续考察当 A 有实部为 0 的特征值时的分类问题。

(14) 设两个平面线性系统的特征值分别是 $\pm\beta i$ 和 $\pm\gamma i$，其中 β, $\gamma>0$ 是正的实数。证明：如果 $\beta=\gamma$，那么它们是共轭的；如果 $\beta\neq\gamma$，那么它们不共轭。

(15) 证明：如果两个平面线性系统的都具有一个零特征值，另一个特征值非零且同号，那么它们是共轭的。

(16) 证明：如果两个平面线性系统都具有两个零特征值，那么它们是共轭的。

(17) 证明：完成平面线性系统的动力学分类，其中要证明不同类的是不共轭的。

解答 (1) 根据流的群性质，我们有对任意的 p 和 t

$$\phi_t^A(\phi_s^A(p))=\phi_s^A(\phi_t^A(p)),$$

此外 ϕ_t^A 自然是同胚，其逆映射是 ϕ_{-t}^A。

(2) 由题意，对任意的 p 和 t，我们有

$$h(\phi_t^A(p))=\phi_t^B(h(p)),$$

在上式两边同时作用 h^{-1} 并且把 p 改写成 $h^{-1}(p)$ 即得

$$\phi_t^A(h^{-1}(p)) = h^{-1}(\phi_t^B(p)).$$

(3) 自己与自己共轭是显然的，对称性由 (2) 得到，假设 h 是从系统 A 到 B 的共轭，g 是从系统 B 到 C 的共轭，那么对任意的 p 和 t，有

$$g \circ h(\phi_t^A(p)) = g(\phi_t^B(h(p))) = \phi_t^C(g \circ h(p)).$$

(4) 这种简单的情况可以直接解出来解，

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_0, \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2} x_0.$$

令

$$h(x) = \begin{cases} x^{\lambda_2/\lambda_1}, & x \geqslant 0 \\ -(-x)^{\lambda_2/\lambda_1}, & x < 0 \end{cases}$$

这是一个同胚。当 $x_0 \geqslant 0$ 时，

$$h(x_1(t)) = x_0^{\lambda_2/\lambda_1} e^{\lambda_2 t} = h(x_0) e^{\lambda_2 t}.$$

当 $x_0 < 0$ 时类似的计算表明 h 是两个系统的共轭。

(5) 映射

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad X \mapsto PX$$

显然是一个同胚，并且

$$h(e^{At} X_0) = PP^{-1} e^{Bt} P X_0 = e^{Bt} h(X_0),$$

这表明 h 是从系统 $X' = AX$ 到 $X' = BX$ 的一个共轭。

(6) 根据 (5)，我们可以假设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_1,\ \mu_2 < 0$。那么容易验证映射

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (h_1(x), h_2(y))$$

是从 $X' = AX$ 到 $X' = BX$ 的共轭，其中

$$h_1(x) = \begin{cases} x^{\lambda_2/\lambda_1}, & x \geqslant 0 \\ -(-x)^{\lambda_2/\lambda_1}, & x < 0 \end{cases}$$

$$h_2(y) = \begin{cases} y^{\mu_2/\mu_1}, & y \geqslant 0 \\ -(-y)^{\mu_2/\mu_1}, & y < 0 \end{cases}$$

(7) 这是线性代数的结论。

(8) 先考虑 (a) 的情形。对任意的 $p = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbf{S}^1$，我们有

$$X(p) \cdot n(p) = \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta \\ -\beta\cos\theta + \alpha\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \alpha(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \alpha < 0.$$

对于 (b) 的情形，类似的计算得到

$$X(p)\cdot n(p)=\begin{pmatrix}\lambda\cos\theta\\ \mu\sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\lambda\cos^2\theta+\mu\sin^2\theta<0.$$

(9) 存在性是显然的。如果不唯一的话，我们考虑“前两次”到达 $\mathbf{S}^1$ 的时刻 (请严格写出“前两次”的定义！)，设为 t_1 和 t_2，其中对任意的 $t_1<t<t_2$，$|\phi_t^A(p)|\leqslant 1$，于是

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_2}|\phi_t^A(p)|^2=2\phi_{t_2}^A(p)\cdot X(\phi_{t_2}^A(p))=2\phi_{t_2}^A(p)\cdot n(\phi_{t_2}^A(p))<0.$$

但是用左导数计算可得

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_2}|\phi_t^A(p)|^2\geqslant 0,$$

这是个矛盾!

(10) 考虑流映射

$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (t,x,y)\mapsto|\phi_t^A(x,y)|^2,$$

这是一个光滑的映射。并且对于 (t,x,y) 满足 $F(t,x,y)=1$，即 $\phi_t^A(x,y)\in\mathbf{S}^1$，有

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,y)=2\phi_t^A(x,y)\cdot X(\phi_t^A(x,y))=2n(x,y)\cdot X(\phi_t^A(x,y))<0,$$

于是根据隐函数定理，τ 在每个 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 附近是光滑的，特别的，τ 是连续的。

(11) 根据 τ 在 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上的连续性以及 ϕ^A, ϕ^B 的连续性，我们得到 H 在 $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上是连续的。当 (x,y) 非常靠近 $(0,0)$ 时，$\tau^A(x,y)$ 是一个很负的数，从而 $-\tau^A(x,y)$ 是一个很大的正数，从而 $\phi^B_{-\tau^A(x,y)}$ 离 $(0,0)$ 很近，这就证明了 H 在 $(0,0)$ 处的连续性。H 的逆映射就是将 H 表达式中的 A, B 相交换得到的，其连续性的证明也是类似的。最后我们证明 H 是共轭。首先注意到

$$\phi^A_{\tau^A(x,y)-t}(\phi_t^A(x,y))=\phi^A_{\tau^A(x,y)}(x,y),$$

于是

$$\tau^A(\phi_t^A(x,y))=\tau^A(x,y)-t.$$

从而

$$H(\phi_t^A(x,y))=\phi^B_{-\tau^A(\phi_t^A(x,y))}(\phi^A_{\tau^A(\phi_t^A(x,y))}(\phi_t^A(x,y)))=\phi_t^B\circ\phi^B_{-\tau^A(x,y)}\circ\phi^A_{\tau^A(x,y)}(x,y)=\phi_t^B(H(x,y)).$$

(12)

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&\varepsilon\\0&\lambda\end{pmatrix}.$$

(13) 对任意的 $p=(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbf{S}^1$，我们有

$$X(p)\cdot n(p)=\begin{pmatrix}\lambda\cos\theta+\varepsilon\sin\theta\\ \lambda\sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\lambda(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\varepsilon\sin\theta\cos\theta,$$

当 ε 非常小时，上式是小于 0 的。其余证明过程仿照上面即可。

(14) 注意到此时两个系统都是具有周期的，它们共轭的一个必要条件是周期相等，即 $\beta=\gamma$。另外当 $\beta=\gamma$ 时它们显然是共轭的。

(15) 通过 (4) 中 $\mathbb{R}$ 的自同胚构造即可。

(16) 显然。

(17) 留作习题答案略，读者自证不难。 $\square$

订正：第二次习题课讲义中**例题** 3(b) 答案有误，现在修正如下。

(b) 由于 $f(t,x)=k(t)-x^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的对 x 偏导数，于是方程的解具有唯一性，所以我们不妨假设 $x_1(t)>x_2(t)$，对任意的 $t\geqslant 0$。此时我们观察 $x_1(t)-x_2(t)$ 满足的方程

$$\frac{d}{dt}(x_1(t)-x_2(t))=(x_2(t))^2-(x_1(t))^2=(x_1(t)+x_2(t))(x_2(t)-x_1(t)).$$

经过分析可以知道存在 $\varepsilon>0$，使得对于充分大的 $t>0$，有 $x_1(t)+x_2(t)>\varepsilon$，这就得到

$$\frac{d}{dt}(x_1(t)-x_2(t))\leqslant-\varepsilon(x_1(t)-x_2(t)),$$

这就说明了 $\lim\limits_{t\to+\infty}|x_1(t)-x_2(t)|=0$。