Week 3

潘晨翔、王曹励文

2024 年 3 月 26 日

8.7.5 作出两个不相交的闭集 A,B, 使得 $\rho(A,B)=0$.

解.

$$A=\{(x,y)|xy=1,x\neq 0\} \qquad B=\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}.$$

□

8.7.6 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 有界. 证明：对任意的常数 $c>0$,$\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)\leq c\}$ 是紧致集.

解. 由 $\rho(\boldsymbol{p})=\rho(\boldsymbol{p},A)$ 为关于 $\boldsymbol{p}$ 的连续函数. 则 $\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)\leq c\}=\rho^{-1}(-\infty,c]$ 为闭集.
由 $A\subset\mathbb{R}^n$ 有界. $\Rightarrow \exists r>0$, 使得 $A\subset B_r(0)$. 有三角不等式得

$$||\boldsymbol{p}||\leq||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}||+||\boldsymbol{a}||\leq||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{p}||+r \quad \forall\boldsymbol{a}\in A$$

对 $\boldsymbol{a}$ 取 inf $\Rightarrow ||\boldsymbol{p}||\leq r+C\Rightarrow\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)\leq c\}\subset B_{r+c}(0)$. 故 $\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)\leq c\}$ 有界. 由有界闭集则为紧致集. □

8.7.7 设连续函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 既取正值，也取负值。求证：集合 $E=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n:f(\boldsymbol{p})\neq 0\}$ 是非连通集.

解.

$$E=f^{-1}(-\infty,0)\cup f^{-1}(0,+\infty)$$

由 f 连续，则 $f^{-1}(-\infty,0)$, $f^{-1}(0,+\infty)$ 为不相交的非空开集，故 E 不连通. □

8.8.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 连续,$E\subset\mathbb{R}^n$. 求证：$f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$. 在什么条件下有 $f(\bar{E})=\overline{f(E)}$

解. 由 $\overline{f(E)}$ 为闭集，且 f 为连续函数, 则 $f^{-1}(\overline{f(E)})$ 为闭集. 而由定义 $E\subset f^{-1}(\overline{f(E)})$, 两边取闭包有 $\overline{E}\subset f^{-1}(\overline{f(E)})$. 则有 $f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$.
若 E 为紧致集, 则 E 为闭集，且由 f 连续则 $f(E)$ 仍为紧致集则也为闭集. 则有 $E=\overline{E}$, $f(E)=\overline{f(E)}$. 故有 $f(\bar{E})=\overline{f(E)}$. □

事实上，这里可以提出一个充要条件，即 f 为闭映射 (闭集的像是闭集).

8.8.2 设 $E\subset\mathbb{R}, f:E\to\mathbb{R}^n$. 证明:
(1) 若 E 是闭集,f 连续, 则 f 的图像

$$G(f)=\{(x,f(x)):x\in E\}$$

是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的闭集;

(2) 若 E 是紧致集,f 连续, 则 $G(f)$ 也是紧致集;

(3) 若 $G(f)$ 是紧致集, 则 f 连续.

解. (1)$\forall$ $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$, 则 $x_n \to x$ 且 $x_n \in E$, E 为闭集, 则 $x \in E$. 由 f 连续, 则 $f(x_n) \to f(x)$. 而 $f(x_n) \to y \Rightarrow f(x) = y$, 则 $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$.

(2)$g : E \to G(f) \quad g(x) = (x, f(x))$ 则由 f 连续 $\Rightarrow g$ 连续. 由 E 为紧致集, 则 $G(f)$ 也为紧致集.

(3) 若 f 在 x_0 点处不连续, 则 $\exists\epsilon_0$, $\exists x_n$ 使得 $|f(x_0) - f(x_n)| > \epsilon_0 \quad n = 1, 2, \ldots$ 由 $G(f)$ 为紧致集, 则对 $\{(x_n, f(x_n))\}$ 存在收敛子列 $\{(x_{n_k}, f(x_{n_k}))\} \to (x, f(x))$ 由 $x_n \to x_0$, 则 $x_0 = x \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ 矛盾。 □

9.1.2 设函数 $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$. 在坐标原点处沿着哪些方向 f 的方向导数存在?

解. 令 $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{(t\cos\theta)^2 - (t\sin\theta)^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\sqrt{|\cos 2\theta|},$$

则只有 $\cos 2\theta = 0$ 才有极限存在。解得

$$\theta = \frac{\pi}{4}或\frac{3\pi}{4}或\frac{5\pi}{4}或\frac{7\pi}{4}$$

□

注意这里方向必须写全，很多同学只写了一部分，虽然另外两个是这两个的反向.

9.1.3 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

在坐标原点处沿着哪些方向 f 的方向导数存在?

解. 令 $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ 则

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{t\cos\theta t\sin\theta}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2|t|}\sin 2\theta.$$

则只有 $\sin 2\theta = 0$ 才有极限存在。解得

$$\theta = 0或\frac{\pi}{2}或\pi或\frac{3\pi}{2}.$$

□

9.1.4 设函数 $f(x, y, z) = |x + y + z|$. 在平面 $x + y + z = 0$ 上的每一点处, 沿着哪些方向 f 的方向导数存在?

解. 令 $v = (v_1, v_2, v_3)$，则在 (x_0, y_0, z_0) 点处

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{|tv_1 + tv_2 + tv_3|}{t},$$

则只有 $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ 才有极限存在. 故沿着平面内的任意方向都可以. □

这题错的太多了，不知道同学们怎么借出来具体的角度值.

9.1.5

(1) 设 $f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1),\frac{\partial f}{\partial y}(0,1),\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

(2) 设 $f(x,y)=\ln(1+xy)+3$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

(3) 设 $f(x,y)=e^{x+y^2}+\sin x^2y$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1),\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

解. (1)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial f}{\partial y}=1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \Rightarrow&\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2,\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1+\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1+xy},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{1+xy}\\ \Rightarrow&\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{2}{3},\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y^2}+2xy\cos x^2y,\frac{\partial f}{\partial y}=2e^{x+y^2}+\cos(x^2y)x^2\\ \Rightarrow&\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=e^2+2\cos 1,\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=2e^2+\cos 1.\end{aligned}$$

□

9.1.6 计算偏导数

(2) $z=\tan\frac{x^2}{y}$;

(4) $z=\log(x+y^2)$;

(6) $z=\sin(xy)$;

(8) $u=e^{xyz}$;

(10) $u=\log(x+y^2+z^3)$;

(12) $z=\arcsin(x_1^2+\cdots+x_n^2)$.

解.

$$\begin{aligned}&(2)\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{\cos^2(\frac{x^2}{y})y},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{\cos^2(\frac{x^2}{y})y^2};\\ &(4)\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2};\\ &(6)\quad \frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy),\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy);\\ &(8)\quad \frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz},\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{xyz},\frac{\partial u}{\partial z}=xye^{xyz};\\ &(10)\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2+z^3},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2+z^3},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3};\\ &(12)\quad \frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{2x_i}{\sqrt{1-(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2}}.\end{aligned}$$

□

9.2.1 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

求证：函数 f 在原点处的各个方向导数存在, 但在原点处 f 不可微。

解. 令 $v=(\cos\theta,\sin\theta)$, 则沿着 v 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2\cos^2\theta\cdot t\sin\theta}{t^4\cos^4\theta+t^2\sin^2\theta}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

若 $\sin\theta\neq 0$ 则有

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta};$$

若 $\sin\theta=0$ 则有

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0.$$

故各个方向导数存在.
但取 $x=0$ 方向和 $y=x^2$ 方向逼近原点，分别得到 0 和 $\frac{1}{2}$, 故在原点处不连续，故不可微。 □

考试的时候务必注意，如果说明不连续性，请指明点列的逼近，而不是只声称不连续性. 极限过程均是如此.

9.2.2 求证：函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微。

解. 先计算

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,$$

类似计算有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0,$$

假设 f 在原点处可微, 则只有

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

于是我们有

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

但是取 $x=y$ 方向趋向于原点, 则得到极限为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 矛盾。 □

9.2.4 求下列函数在指定点处的微分:
(2)$f(x,y,z)=\ln(x+y-z)+e^{x+y}\sin z$，在点 $(1,2,3)$ 处;
(4)$u=\sin(x_1+x_x^2+...+x_n^n)$, 在点 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 处

解. (2) 分别计算 x,y,z 的偏导数得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y-z}+e^{x+y}\sin z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y-z}+e^{x+y}\sin z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{1}{x+y-z}+e^{x+y}\cos z$$

则带入 $(1,2,1)$ 点处，得到

$$\mathrm{d}f=(\frac{1}{2}+e^2\sin 1)\mathrm{d}x+(\frac{1}{2}+e^2\sin 1)\mathrm{d}y+(-\frac{1}{2}+e^2\cos 1)\mathrm{d}z$$

(4) 分别计算 x_i 的偏导数得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=i*\cos(x_1+x_2^2+...+x_n^n)*x_i^{i-1}$$

得到在 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 处的微分为

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n} i*\cos(x_1+x_2^2+...+x_n^n)*x_i^{i-1}\mathrm{d}x_i$$

□

9.2.5 计算下列函数 f 的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{J}f$:

(2)$f(x,y,z)=x^2y\sin yz$;

(4)$f(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

解. (2)

$$\big(2xy\sin(yz),x^2\sin(yz)+x^2yz\cos(yz),x^2y^2\cos(yz)\big).$$

(4)

$$\Big(\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{\frac{1}{2}}},\cdots,\frac{x_n}{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^{\frac{1}{2}}}\Big).$$

□

9.2.6 证明：二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处可微，但它的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

解. 分别计算 x,y,z 的偏导数得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t}=0,$$

类似计算有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t}=0.$$

由于

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0,y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故其在原点处可微. 而在不在原点处的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

沿 $y=0$ 方向趋向于原点时，极限不存在。故不连续。

关于 y 的偏导数同理可得不连续。 □

这种问题是标准的，可微的验证或者不可微的证明均是考虑本解答中的这个极限.