16 Week 16

12.4.1 利用 Gauss 公式，计算下列积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$,$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 方向朝外；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$,$\Sigma$ 是由四张平面 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的封闭曲面，方向朝外;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy$,$\Sigma$ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$, 方向朝下;

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$,$\Sigma$ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\le z\le 1)$, 方向朝下.

解. (1) 由 Gauss 公式和对称性,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy &= \iiint\limits_{\Omega} 2(x+y+z)dxdydz \\ &= 0.\end{aligned}$$

(2) 由 Gauss 公式和对称性,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy &= \iiint\limits_{\Omega} x+y+zdxdydz \\ &= 3\iint\limits_{\Omega} xdxdydz \qquad . \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

(3) 先补上 $z=1$ 的平面上一部分使其为封闭的曲面，再由 Gauss 公式得,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy &= \iiint\limits_{\Omega} 3dxdydz - \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=1}} (z-x)dxdy \\ &= \frac{3\pi}{2} - \pi \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(3) 先补上 $z=1$ 的平面上一部分使其为封闭的曲面，再由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy &= \iiint\limits_{\Omega} 2(x+y+z)dxdydz - \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=1}} z^2dxdy \\ &= 2\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz - \pi \\ &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

12.4.2 设 Ω 是一闭域，向量 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,$\mathbf{e}$ 是固定的一个向量. 求证:

$$\int_{\partial\Omega}\cos(\mathbf{e},\mathbf{n})d\sigma=0.$$

解. 令 $\mathbf{F}=\frac{\mathbf{e}}{||\mathbf{e}||}$, 由 Gauss 公式得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\cos(\mathbf{e},\mathbf{n})d\sigma&=\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma\\&=\int_{\Omega}div(\mathbf{F})d\mu\\&=0.\end{aligned}$$

□

12.4.3 设 Ω 是一闭域,向量 $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,点 $(a,b,c)\notin\partial\Omega$. 令 $\mathbf{p}=(x-a,y-b,z-c)$ 且 $p=||\mathbf{p}||$. 求证:

$$\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{p}=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\cos(\mathbf{p},\mathbf{n})d\sigma.$$

解. 令 $\mathbf{F}=\frac{\mathbf{p}}{||\mathbf{p}||}$, 由 Gauss 公式得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\cos(\mathbf{p},\mathbf{n})d\sigma&=\int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma\\&=\int_{\Omega}div(\mathbf{F})d\mu\\&=2\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{p}.\end{aligned}$$

□

12.4.4 利用 Stokes 公式, 计算下列积分:

(1)$\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$,Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=0$, 从第一卦限看去，Γ 是逆时针方向绕行的;

(2)$\int_\Gamma(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$,$\Gamma$ 为椭圆 $x^2+y^2=2y,y=z$, 从点 (0,1,0) 向 Γ 看去,Γ 是逆时针方向绕行的;

(3)$\int_\Gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz$,$\Gamma$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=a$, 从原点看去,Γ 是逆时针方向绕行的;

解. (1) 曲面的外法向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma ydx+zdy+xdz&=\iint_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1&1&1\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y&z&x\end{vmatrix}d\sigma\\&=\sqrt{3}\iint_{\Omega}d\sigma\\&=-\sqrt{3}\pi a^2.\end{aligned}$$

(2) 曲面的外法向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. 由 Stokes 公式,

$$\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz = \iint\limits_\Omega \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} d\sigma$$

$$= 0.$$

(3) 曲面的外法向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$. 由 Stokes 公式,

$$\int_\Gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz = \iint\limits_\Omega \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} d\sigma$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Omega (x+y+z)d\sigma$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Omega d\sigma$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3.$$

□

12.4.5 设曲面 Σ 有单位法向量 **n**,**a** 是一个常向量. 求证:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{a}\times\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p} = 2\iint\limits_\Sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}d\sigma.$$

解. 设 $\mathbf{p}=(x,y,z), \mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则有

$$\mathbf{a}\times\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2z-a_3y, a_3x-a_1z, a_1y-a_2x)$$

则由 Stokes 公式得

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{a}\times\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p} = \iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2z-a_3y & a_3x-a_1z & a_1y-a_2x \end{vmatrix} d\sigma$$

$$= 2\iint\limits_\Sigma a_1n_x+a_2n_y+a_3n_zd\sigma$$

$$= 2\iint\limits_\Sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}d\sigma.$$

□

12.4.6 计算 $\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$,Γ 是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周, 从原点看去, 顺时针方向是 Γ 的正向.

解. 曲面的外法向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma ydx+zdy+xdz &= \iint\limits_\Omega \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}d\sigma\\ &= -\sqrt{2}\iint\limits_\Omega d\sigma\\ &= -2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

□

12.4.7 计算上级的积分, 但 Γ 是曲面 $z=xy$ 和 $x^2+y^2=1$ 的交线，沿 Γ 的正向行进时，z 轴在左手边.

解. 曲面在 (x,y,z) 处的外法向量为 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}(-x,-y,1)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma ydx+zdy+xdz &= \iint\limits_\Omega \begin{vmatrix}n_x & n_y & n_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}d\sigma\\ &= -\iint\limits_\Omega dydz+dzdx+dxdy\\ &= -\iint\limits_\Omega n_x+n_y+n_z d\sigma\\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x+y-1)dxdy\\ &= -\pi.\end{aligned}$$

□

12.4.8 设定向曲线 $\Gamma: x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax, z\ge 0$, 从点 (a/2,0,0) 看去, 沿逆时针方向行进. 试计算力场 $\mathbf{F}=(y^2,z^2,x^2)$ 沿 Γ 所做的功.

解. 曲面在 (x,y,z) 处的外法向量为 $\frac{1}{a}(-x,-y,-z)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma ydx+zdy+xdz &= \iint\limits_\Omega \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} d\sigma \\ &= \iint\limits_\Omega -2zdydz-2xdzdx-2ydxdy \\ &= -\iint\limits_\Omega \frac{2}{a}(xz+xy+yz)d\sigma \\ &= -\iint\limits_\Omega \frac{2}{a}xzd\sigma \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le ax} 2xdxdy \\ &= \frac{\pi}{4}a^3.\end{aligned}$$

注: 也可以用课本第 104 页，这是曲面的定向向下，右边出来正负号。 □

12.5.1 计算:

解. (1)$xzdx\wedge dz+yzdy\wedge dz+yzdx\wedge dy$,
(2)$(x-z)dx\wedge dy\wedge dz$. □

12.5.2 计算 $d\omega$

解. (1)$(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$,
(2)$-ydx\wedge dy$,
(3)$ydz\wedge dx+(x+z)dy\wedge dx$,
(4)$xdx\wedge dy$,
(5)$-(x^2+yze^x)dz\wedge dy-ye^xdz\wedge dy$,
(6)$(y^2-2xz)dx\wedge dy\wedge dz$,
(7)$(x+y+z)dx\wedge dy\wedge dz$. □

13.1.1 设 f,g 为数量场, 证明:

$$\nabla\frac{f}{g}=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g).$$

解. 逐个分量直接计算得. □

13.1.2 设 u 为一数量场,$\mathbf{f}$ 为一向量场. 计算 $\nabla(u\circ\mathbf{f})$.

解. 令 $f=(P,Q,R)$ 由链式法则逐个分量计算得到

$$\nabla(u\circ\mathbf{f})=u_1'\nabla P+u_2'\nabla Q+u_3'\nabla R$$

□

13.1.3 设 $\mathbf{p}=(x,y,z)$,$p=||\mathbf{p}||$,f 为单变量函数. 计算:
(2)$\nabla f(p)$;
(4)$\nabla(f(p)\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})$, 其中 $\mathbf{a}$ 为常向量

解. (2)

$$\nabla f(p)=\frac{f'(p)}{p}\mathbf{p}$$

(4)

$$\nabla(f(p)\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}f'(p)\frac{\mathbf{p}}{p}+f(p)\mathbf{a}$$

□

13.1.4 求数量场 f 沿数量场 g 的梯度方向的变化率, 问何时这个变化率等于零?

解. 由方向导数的计算方法

$$\frac{\partial f}{\partial\nabla g}=\nabla f\cdot\nabla g$$

则在 ∇f 与 ∇g 相互垂直的时候, 变化率为 0. □

13.1.5 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, $\mathbf{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场, 数量场 u∈ $C^1(\Omega)$, 点 $\mathbf{p}\in\Omega^\circ$. 证明:

$$\nabla u(\mathbf{p})=\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\iint\limits_{\partial\Omega}u\mathbf{n}d\sigma.$$

解.

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\iint\limits_{\partial\Omega}u\mathbf{n}d\sigma&=\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}(\iint\limits_{\partial\Omega}udydz,\iint\limits_{\partial\Omega}udzdx,\iint\limits_{\partial\Omega}udxdy)\\&=\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}(\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}d\mu,\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial y}d\mu,\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial z}d\mu)\\&=\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi),\frac{\partial u}{\partial y}(\eta),\frac{\partial u}{\partial z}(\gamma))\\&=\nabla u(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

□

17 week 17

13.2.1 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 令 $\mathbf{p}=(x,y)$ 且 $p=||\mathbf{p}||$. 求证: 当 $p>0$ 时, $\log p$ 是调和函数.

解. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 计算有

$$\nabla\log p=\frac{\mathbf{p}}{p^2}$$

于是我们有

$$\Delta\log p=\nabla\cdot(\nabla\log p)=\nabla\cdot(\frac{\mathbf{p}}{p^2})=0$$

□

13.2.2 求证:

$$\Delta(fg)=f\Delta(g)+g\Delta(f)+2\nabla f\cdot\nabla g.$$

解.

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \nabla\cdot(\nabla(fg))\\ &= \nabla\cdot(\nabla(f)g + f\nabla(g))\\ &= \nabla\cdot(\nabla(f)g) + \nabla\cdot(f\nabla(g))\\ &= \nabla\cdot(\nabla(f))g + 2\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla\cdot(\nabla(g))\\ &= f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2\nabla f\cdot\nabla g.\end{aligned}$$

□

13.2.3 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域，u，v$\in C^2(\Omega)$,$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场, 求证:
(1)$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma = \int_\Omega \Delta u d\mu$;
(2)$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v d\mu + \int_\Omega v\Delta u d\mu$;
(3)(第二 Green 公式)

$$\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}d\sigma = \int_\Omega\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}d\sigma.$$

解. (1) 由方向导数的计算方法和 Gauss 公式得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma &= \int_{\partial\Omega}\nabla u\cdot\mathbf{n}d\sigma\\ &= \int_\Omega \Delta u d\mu.\end{aligned}$$

(2) 由方向导数的计算方法和 Gauss 公式得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma &= \int_{\partial\Omega} v\nabla u\cdot\mathbf{n}d\sigma\\ &= \int_\Omega \nabla\cdot(v\nabla u)d\mu\\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v d\mu + \int_\Omega v\Delta u d\mu.\end{aligned}$$

(3) 在 (2) 中交换 u 和 v 得到

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}d\sigma = \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u d\mu + \int_\Omega u\Delta v d\mu,$$

与 (2) 中的式子做差得到

$$\int_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\\ u & v\end{vmatrix}d\sigma = \int_\Omega\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}d\sigma.$$

□

13.2.4 设 u 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭区域 Ω 上的调和函数,$\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 求证:
(1)$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma = 0$;
(2)$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}d\sigma = \int_\Omega ||\nabla u||^2$.

解. 在 13.2.3 中带入 $v=u$ 且 u 为调和函数, 即可得到等式成立。 □

13.3.1 证明:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F}.$$

解. 令 $\mathbb{F}=(P,Q,R)$,

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})&=\Big(\frac{\partial^2Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2P}{\partial z^2}+\frac{\partial^2R}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2R}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2Q}{\partial z^2}-\frac{\partial^2Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2P}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2Q}{\partial z\partial y}\Big)\\&=\nabla\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)-(\Delta P,\Delta Q,\Delta R)\\&=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\Delta\mathbf{F}\end{aligned}$$

□

13.3.2 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, $\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 向量场 $\mathbf{F}\in C^1(\Omega)$. 求证:

$$rot\mathbf{F}(\mathbf{p})=\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\mathbf{n}\times\mathbf{F}d\sigma.$$

解. 设 $n=(n_x,n_y,n_z)$,$\mathbf{F}=(P,Q,R)$ 计算可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\mathbf{n}\times\mathbf{F}d\sigma=\int_{\partial\Omega}&\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\n_x&n_y&n_z\\P&Q&R\end{vmatrix}d\sigma\\&=\Big(\int_{\partial\Omega}n_yR-n_zQd\sigma,\int_{\partial\Omega}n_zP-n_xRd\sigma,\int_{\partial\Omega}n_zP-n_xRd\sigma\Big)\\&=\Big(\iint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}d\mu,\iint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}d\mu,\iint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}d\mu\Big).\end{aligned}$$

带入由积分中值定理得

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\to\mathbf{p}}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\mathbf{n}\times\mathbf{F}d\sigma&=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\\&=rot\mathbf{F}(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

□

13.3.3 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域, 数量场 $f\in C^2(\Omega)$, 在 Ω 中处处不为零, 且满足条件

$$div(fgradf)=af,\qquad ||\nabla f||^2=bf,$$

其中 a 与 b 为常数. 试计算 $\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}d\sigma$.

解.

$$\begin{aligned}af&=\nabla\cdot(f\nabla f)\\&=\nabla f\cdot\nabla f+f\Delta f\\&=bf+f\Delta f,\end{aligned}$$

由 f 处处不为 0, 得到

$$\Delta f=a-b,$$

则计算结果得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}d\sigma=\int_{\Omega}\Delta f d\mu$$
$$=(a-b)\mu(\Omega).$$

□

13.4.1 求下面 $\mathbf{F}$ 的势函数:

(1)$\mathbf{F}=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z}\right)$;

(2)$\mathbf{F}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+2xy}(x+y,x+y,z)$.

解. (1) 定义域 $D=(x,y,z)|y\neq 0,z\neq 0$, 分为四个单连通的区域. 先考虑 y 大于 0，z 大于 0 的区域，其他区域同理计算. 由 $\nabla\times\mathbf{F}=0$ 则为无旋场，于是存在势函数。

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(0,1,1)}^{(x,y,z)}(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z})dx+(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2})dy-\frac{xy}{z}dz$$
$$=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+x$$

于是全体势函数为 $\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+x+C$

(2) 定义域 $D=(x,y,z)|x+y\neq 0,z\neq 0$, 分为四个单连通的区域. 先考虑 x+y 大于 0，z 大于 0 的区域，其他区域同理计算由 $\nabla\times\mathbf{F}=0$ 则为无旋场，于是存在势函数。

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(0,0,1)}^{(x,y,z)}\frac{x+y}{x^2+y^2+z^2+2xy}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2+z^2+2xy}dy\frac{z}{x^2+y^2+z^2+2xy}dz$$
$$=\frac{1}{2}\log((x+y)^2+z^2)$$

于是全体势函数为 $\frac{1}{2}\log((x+y)^2+z^2)+C$

□

13.4.2 计算下列恰当微分的曲线积分:

(1)$\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}xdx+y^2dy-z^2dz$;

(2)$\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}yzdx+xzdy+xydz$;

(3)$\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 (x_1,y_1,z_1) 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的点,(x_2,y_2,z_2) 是球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上的点, 并设 $a>0,b>0$.

解. (1)

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}xdx+y^2dy-z^2dz=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}z^3\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}$$
$$=\frac{191}{6}.$$

(2)

$$\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}yzdx+xzdy+xydz=xyz\Big|_{(1,2,3)}^{(0,1,1)}$$
$$=-6.$$

(3)

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$
$$= b-a.$$

□

13.4.4 设 f 为单变量的连续函数. 计算:

(1) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$;

(2) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz)$.

解. (1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

$$\begin{aligned}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz) &= F(x+y+z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\\ &= F(x_2+y_2+z_2)-F(x_1+y_1+z_1)\\ &= \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(t)dt.\end{aligned}$$

(2) 令 $F(x)=\int_0^x f(\sqrt{t})dt$

$$\begin{aligned}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz) &= \frac{1}{2}F(x^2+y^2+z^2)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\\ &= \frac{1}{2}(F(\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2})-F(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}))\\ &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} f(\sqrt{t})dt.\end{aligned}$$

□

13.4.6 求解下列恰当方程:

(1)$xdx+ydy=0$;

(3)$(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$;

(5)$e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$;

(7)$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=xdx+ydy$.

解. (1) $x^2+y^2=C$

(3)

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+2y)dx+(2x+y)dy\\ &= \int_0^x xdx+\int_0^y 2x+ydy\\ &= \frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

于是解为 $x^2+4xy+y^2=C$

(5)

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} e^y dx + (xe^y - 2y)dy \\ &= \int_0^x dx + \int_0^y (xe^y - 2y)dy \\ &= xe^y - y^2.\end{aligned}$$

于是解为 $xe^y - y^2 = C$

(7)

$$d(\arctan\frac{y}{x}) = d(\frac{1}{2}(x^2+y^2))$$

于是解为 $\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = C$

□

13.5.1 证明下列向量场都是 $\mathbb{R}^3$ 中的旋度场，并求其向量势:

(1)$\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$;

(2)$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + -y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$;

(3)$\mathbf{F} = (z-y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (y-x)\mathbf{k}$.

解. (1) 令 $\mathbf{G} = (P, Q, 0)$ 满足 $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$ 于是得到

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

于是得到

$$\begin{cases} -\frac{\partial Q}{\partial z} = z \\ \frac{\partial P}{\partial z} = x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y \end{cases}$$

可取出一组解

$$\mathbf{G} = (xz, -\frac{1}{2}z^2 + xy, 0)$$

则所有的向量势为

$$(xz, -\frac{1}{2}z^2 + xy, 0) + \nabla\varphi$$

(2) 令 $\mathbf{G} = (P, Q, 0)$ 满足 $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$ 于是得到

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + (y-x)\mathbf{k},$$

于是得到

$$\begin{cases} -\frac{\partial Q}{\partial z} = xy \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = yz \end{cases}$$

可取出一组解

$$\mathbf{G}=(-y^2z,-xyz,0)$$

则所有的向量势为

$$(-y^2z,-xyz,0)+\nabla\varphi$$

(3) 令 $\mathbf{G}=(P,Q,0)$ 满足 $\nabla\times\mathbf{G}=\mathbf{F}$ 于是得到

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}=(z-y)\mathbf{i}+(x-z)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k},$$

于是得到

$$\begin{cases} -\frac{\partial Q}{\partial z}=z-y \\ \frac{\partial P}{\partial z}=x-z \\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y-x \end{cases}$$

可取出一组解

$$\mathbf{G}=(xz-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}y^2+xy,-\frac{1}{2}z^2+yz,0)$$

则所有的向量势为

$$(xz-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}y^2+xy,-\frac{1}{2}z^2+yz,0)+\nabla\varphi$$

□

13.5.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中关于 $\mathbf{A}=(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 的星形域. 如果 $\mathbf{F}$ 是 Ω 中的无旋场, 即 $div\mathbf{F}=0$, 证明:$\mathbf{F}$ 必为 Ω 中的旋度场.

解. 见课本. □

13.6.1 在柱坐标中, 设流体的速度 $\mathbf{v}$ 在正交曲线坐标系下的分量 v_r,v_θ,v_z. 求证: 这时的连续性方程是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(prv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0.$$

解. 连续性方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{v})=0$$

在柱坐标下 $\mathbf{f}=(x,y,z)$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

于是我们得到

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial r}=(\cos\theta,\sin\theta,0) \\ \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\theta}=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0) \\ \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z}=(0,0,1) \end{cases}$$

计算得到

$$h_r = 1 \qquad h_\theta = r \qquad h_z = 1$$

由题设得

$$\mathbf{v} = v_r \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$$

带入正交标架下的散度表示

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{1}{r}(\frac{\partial \rho v_r r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z r}{\partial z})$$

带入连续性方程得到柱坐标下的方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (prv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

□