Week 1

潘晨翔、王曹励文

2024 年 3 月 12 日

8.1.2 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 证明余弦定理

$$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \cos\theta.$$

解.

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 &= \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 - 2||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \cos\theta. \end{aligned}$$

□

8.1.4 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 证明平行四边形定理

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = 2\big(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2\big).$$

解.

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}+y||^2 &= \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = ||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 + 2||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| \cos\theta. \end{aligned}$$

结合 8.1.2 有

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = 2\big(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2\big).$$

□

8.1.5 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是欧氏空间中两个不同的点，记 $2r = ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|| > 0$, 求证

$$B_r(\boldsymbol{a}) \cap B_r(\boldsymbol{b}) = \emptyset$$

解. 反证，假设 $\exists \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{a}) \cap B_r(\boldsymbol{b})$, 则

$$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|| < r, ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|| < r$$

由向量空间的绝对值不等式

$$2r = ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}|| < r + r = 2r,$$

矛盾。 □

8.1.6 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, 证明：$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq ||\boldsymbol{x}||_2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

解. 由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = n||\boldsymbol{x}||^2$$

得到左边的 $\leq$, 右边的 $\leq$ 平方展开后即得。

这里需要注意是带绝对值的展开。 □

8.1.7 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, 证明：$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\max_i |x_i| \leq ||\boldsymbol{x}||_2 \leq \sqrt{n}\max_i |x_i|.$$

解.

$$\max_i |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \leq n\max_i |x_i|^2$$

开方即得。 □

8.2.1 在 $\mathbb{R}^2$ 中定义

$$\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \sqrt[n]{n}\right)$$

, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = (0,1)$.

解.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

由逐分量收敛,

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n = (0,1)$$

分量的极限通过单变量的极限证明。 □

8.2.2 证明定理 8.2.1.

解. 使用逐分量收敛或定义证明均可。 □

8.2.3* 证明欧氏空间中收敛列有界。

解. 设 $\boldsymbol{x}_n$ 是欧氏空间中的任一收敛列，收敛于点 $\boldsymbol{x}$, 则由定义，$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, when $n > N, ||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|| < \varepsilon$.
对于 $n \leq N, \exists\ 0 < A < \infty, s.t. ||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|| < A$.
取 $R = \max\{A, \varepsilon\}$ 得 $||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|| < R, \forall n$, 故 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 有界。 □

8.2.4 证明欧氏空间中基本列有界。

解.（法 1.）欧氏空间中基本列 $\Leftrightarrow$ 收敛列，由 8.2.3 得到基本列收敛。（需要将 8.2.3 结论的证明写出）
（法 2.）设 $\boldsymbol{x}_n$ 是欧氏空间中的任一基本列，则由基本列的定义 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, when $m, n > N, ||\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n|| < \varepsilon$. 特别地，$||\boldsymbol{x}_{N+1} - \boldsymbol{x}_n|| < \varepsilon, \forall n > N$.
另一方面，对于 $n \leq N, \exists\ 0 < A < \infty, s.t. ||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{N+1}|| < A$.
取 $R = \max\{A, \varepsilon\}$ 得 $||\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{N+1}|| < R, \forall n$, 故 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 有界。 □

8.3.1 求出 $A^\circ, \bar{A}, \partial A$.

space	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A^\circ}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	$\boldsymbol{\partial A}$
$\mathbb{R}$	$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$	$\emptyset$	$A\cup\{0\}$	$A\cup\{0\}$
$\mathbb{R}^2$	$\{(x,y):0<y<x+1\}$	A	$\{(x,y):0\le y\le x+1\}$	$\{(x,y):x\ge -1$且$y=0$ or $y=x+1\}$
$\mathbb{R}^n$	**有限点集**	$\emptyset$	A	A

注意这里的 (1) 所求 ∂A，为本次作业的重灾区，其性质可以大致表述为以它为圆心，任意做一个球，球中既有集合中的点，也有非集合中的点。

8.3.2 设 $A=\{(x,y):x,y\in\mathbb{Q}\}$, 求 $A^\circ,(A^c)^\circ,\partial A$.

解. 由有理数的稠密性知

(1)$A^\circ=\emptyset$. 对每一个 A 中的点 $\boldsymbol{x}$, 它的每一个邻域内都有分量有无理数的点, 即 $\forall \boldsymbol{x}\in A,\forall r, B_r(\boldsymbol{x})\cup A^c\neq\emptyset$.

(2)$(A^c)^\circ=\emptyset$. 同 (1).

(3)$\partial A=\mathbb{R}^2$.$\mathbb{R}^2$ 中的每一个点的任意邻域内都有 A 中的点，或 $\partial A=\mathbb{R}^2\backslash(A^\circ\cup(A^c)^\circ)=\mathbb{R}^2$. □

8.3.3* 证明 $\boldsymbol{x}\in\bar{A}\Leftrightarrow\forall r>0, B_r(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset$.

解. "$\Rightarrow$"：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}\in\bar{A}=A\cup A',\\&\text{if } \boldsymbol{x}\in A\Rightarrow\boldsymbol{x}\in B_r(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset,\forall r>0.\\&\text{if } \boldsymbol{x}\in A'\overset{\text{def}}{\Rightarrow}\forall r>0, B_r(\check{\boldsymbol{x}})\cap A\neq\emptyset\Rightarrow B_r(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset,\forall r>0.\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"：

$$\begin{aligned}&\forall r>0, B_r(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset,\\&\text{if } \boldsymbol{x}\in A\Rightarrow\boldsymbol{x}\in A\subset\bar{A}.\\&\text{if } \boldsymbol{x}\notin A\Rightarrow\forall r>0, B_r(\check{\boldsymbol{x}})\cap A\neq\emptyset\overset{\text{def}}{\Rightarrow}\boldsymbol{x}\text{是}A\text{的聚点}\Rightarrow\boldsymbol{x}\in A'\subset\bar{A}.\end{aligned}$$

□

8.3.5 证明 $\partial A=\bar{A}\cap(A^\circ)^c$.

解.

$$\boldsymbol{x}\in\partial A\Leftrightarrow\forall r>0,\begin{cases}B_r(\boldsymbol{x})\cap A\neq\emptyset\overset{8.3.3}{\Leftrightarrow}\boldsymbol{x}\in\bar{A}\\B_r(\boldsymbol{x})\cap A^c\neq\emptyset\Leftrightarrow B_r(\boldsymbol{x})\not\subseteq A\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\notin A^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in\bar{A}\cap(A^\circ)^c.$$

□

8.3.7 证明 (1)$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.(2)$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

解. (1)

$$\boldsymbol{x}\in(A\cap B)^\circ\Leftrightarrow\exists r>0, B_r(\boldsymbol{x})\subset A\cap B\Leftrightarrow\begin{cases}B_r(\boldsymbol{x})\subset A\Leftrightarrow x\in A^\circ\\B_r(\boldsymbol{x})\subset B\Leftrightarrow x\in B^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in A^\circ\cap B^\circ.$$

(2)

(a) $\overline{A\cup B}\subset \bar{A}\cup\bar{B}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\in\overline{A\cup B}&\Rightarrow \boldsymbol{x}\in A\cup B\subset\bar{A}\cup\bar{B}\\ &\quad\text{or } \boldsymbol{x}\in(A\cap B)'\Rightarrow\exists\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\cup B, s.t.\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}\\ &\quad\Rightarrow\begin{cases}\{\boldsymbol{x}_n\}\text{中只有有限项不同}\Rightarrow\boldsymbol{x}\in A\cup B\subset\bar{A}\cup\bar{B}\\ \{\boldsymbol{x}_n\}\text{中有无限项在 }A\text{ 中或者 }B\text{ 中}\Rightarrow\boldsymbol{x}\in A'\subset\bar{A}\text{ or }\boldsymbol{x}\in B'\subset\bar{B}\end{cases}\\ &\quad\Rightarrow\boldsymbol{x}\in\bar{A}\cup\bar{B}.\end{aligned}$$

(b) $\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$

$$\boldsymbol{x}\in\bar{A}\cup\bar{B}\Rightarrow\boldsymbol{x}\in\bar{A}\subset\overline{A\cup B}\text{ or }\boldsymbol{x}\in\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$$

□

8.3.8 (1) 作出闭集列 $\{F_i\}$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i=B_1(\mathbf{0})$;(2) 作出开集列 $\{G_i\}$, 使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i=B_1(\mathbf{0})$.

解.

$$F_i=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:||x||\le 1-\frac{1}{i}\}=\overline{B_{1-\frac{1}{i}}(\mathbf{0})};$$
$$G_i=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:||x||<1+\frac{1}{i}\}=B_{1+\frac{1}{i}}(\mathbf{0}).$$

□

8.3.9 I 为指标集，证明：(1)$\overline{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$;(2)$\big(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\big)^\circ\supset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^\circ$. 并举例说明真包含关系是可以出现的。

解. (1)

$$A_\alpha\subset\overline{A_\alpha}\Rightarrow\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}\overset{\text{闭包}}{\Rightarrow}\overline{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}\subset\overline{\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}}\overset{\text{闭集}}{=}\bigcap_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}.$$

举例：$A_1=(0,1),A_2=(1,2).\overline{A_1\cap A_2}=\emptyset,\overline{A_1}\cup\overline{A_2}=\{1\}.$

(2)

$$A_\alpha^\circ\subset A_\alpha\Rightarrow\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^\circ\subset\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\overset{\text{内部}}{\Rightarrow}\big(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\big)^\circ\supset\big(\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha)^\circ\big)^\circ\overset{\text{开集}}{=}\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha)^\circ.$$

举例：$A_1=[0,1],A_2=[1,2].A_1^\circ\cup A_2^\circ=(0,2)\backslash\{1\},(A_1\cup A_2)^\circ=(0,2).$

这里需要注意一下，沉思录答案是不对的。 □

8.3.10 设 $E\in\mathbb{R}^n$. 求证：∂E 是闭集。

解. 根据书上定义，$\partial=\mathbb{R}^n\backslash\big(E^\circ\cup(E^c)^\circ\big)$,$E^\circ\cup(E^c)^\circ$ 是开集，故 ∂E 是闭集。

也可根据集合中点的描述证明。

$$\boldsymbol{x}\in\partial E\Leftrightarrow B_r(\boldsymbol{x})\cap E\neq\emptyset\text{且}B_r(\boldsymbol{x})\cap E^c\neq\emptyset,\forall r>0.$$

故

$$\boldsymbol{x}\notin\partial E\Leftrightarrow\exists r>0,B_r(\boldsymbol{x})\cap E\neq\emptyset\text{ or }B_r(\boldsymbol{x})\cap E^c\neq\emptyset.$$

所以

$$\forall \boldsymbol{y} \in B_r(\boldsymbol{x}), \text{取} r' = r - ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||, \text{则} B_{r'}(\boldsymbol{y}) \subset B_r(\boldsymbol{x}).$$

因此

$$B_{r'}(\boldsymbol{y}) \cap E = \emptyset \text{ or } B_{r'}(\boldsymbol{y}) \cap E^c = \emptyset \Rightarrow y \in (\partial E)^c.$$

$B_r(\boldsymbol{x}) \subset (\partial E)^c, (\partial E)^c$ 是开集。 □

8.3.11 设 $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是两个不相交的开集，证明 $G_1 \cap \overline{G_2} = \overline{G_1} \cap G_2 = \emptyset$.

解. 根据 G_1, G_2 的对称性，只需证其中一个。假设 $\exists \boldsymbol{x} \in G_1 \cap \overline{G_2} \neq \emptyset$. 则

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \in G_1 \overset{\text{开集}}{\Rightarrow} \exists r_0 > 0, B_{r_0}(\boldsymbol{x}) \subset G_1 \\ &\boldsymbol{x} \in \overline{G_2} \Rightarrow \forall r > 0, B_r(\boldsymbol{x}) \cap G_2 \neq \emptyset \end{aligned}$$

故存在 $\boldsymbol{y} \in B_{r_0}(\boldsymbol{x}) \cap G_2 \subset G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, 矛盾。 □

8.3.12 P 是投影算子，E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集，求证 $P(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集。并举例说明若 A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，$P(A)$ 不一定是 $\mathbb{R}$ 中的闭集。

解.

$$\forall x \in P(E), \exists (x, y) \in E, \exists r_x > 0, s.t. B_{r_x}\big((x, y)\big) \subset E$$

则

$$(x - r, x + r) = P\Big(B_{r_x}\big((x, y)\big)\Big) \subset P(E),$$

$P(E)$ 是开集。
举例：$A = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x > 0\right\}$ 为闭集，其像 $P(A) = (0, +\infty)$ 非闭集。 □

8.3.13 E 闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$.

解. "$\Rightarrow$"：

$$\forall \boldsymbol{x} \in \partial E \Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(\boldsymbol{x}) \cap E \neq \emptyset \text{且} B_r(\boldsymbol{x}) \cap E^c \neq \emptyset.$$

E 是闭集，则 E^c 是开集，故由 $\forall r > 0, B_r(\boldsymbol{x}) \cap E^c \neq \emptyset$ 得到 $x \notin E^c$.
"$\Leftarrow$"：

$$\forall \boldsymbol{x} \in E^c, x \notin \partial E \Leftrightarrow \exists r > 0, B_r(\boldsymbol{x}) \cap E = \emptyset \text{ or } B_r(\boldsymbol{x}) \cap E^c = \emptyset.$$

由于 $\boldsymbol{x} \in E^c, B_r(x) \cap E^c \neq \emptyset$, 故 $B_r(\boldsymbol{x}) \cap E = \emptyset$, 即 $B_r(\boldsymbol{x}) \subset E^c$, 所以 E^c 是开集，E 是闭集。 □