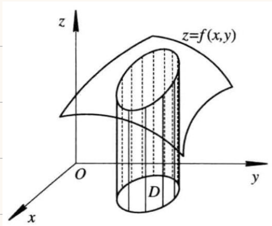
第10章 多重积分

将 Riemann 积分的定义从一维推至n维，本章前半部分从二重积分说起，后将其推广至n元.

§10.1 矩形区域上的积分

从直观层面上引入二重积分的意义，并用类似Riemann积分的定义方式定义



先设f在D上非负，则 $z=f(x,y)$ 在D上形成的曲面与Oxy平面间的曲顶柱体可以类似定义积分

将D分为若干个小块，记作 $D_1,\cdots,D_k$，在 D_i 中取 ξ_i

则体积有近似值 $\sum_{i=1}^{k}\sigma(D_i)f(\xi_i)$　$\sigma(D_i)$ 表示面积

取极限过程，$V=\lim\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(D_i)$，

而极限对象可为 $\max(\mathrm{diam}(D_1)\cdots\mathrm{diam}(D_k))$

若最终结果不依赖于 ξ_i 的选取，即有定义 $V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ / $\int_D f(p)\,d\sigma$

由于 σ 的计算方式不一定容易给出，本节讨论闭矩形上的积分.

1、定义

设 I 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭矩形，$I=[a,b]\times[c,d]$. 作 $[a,b]$ 的分割

$$\pi_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;$$ $(n+1)$个点得到n个区间

又作 $[c,d]$ 的分割

$$\pi_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d.$$ $(m+1)$个点得到m个区间

两族平行直线 $x=x_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 与 $y=y_j\,(j=0,1,\cdots,m)$，把 I 分割成 $k=n\times m$ 个子矩形：

$$[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\quad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m).$$ 对应i,j区间

这 k 个子矩形的全体组成 I 的一个分割 $\pi=\pi_x\times\pi_y$. 用一定的次序重排这 k 个子矩形，将它们编号为 $I_1,I_2,\cdots,I_k$. 在每一个 I_i 中任取一点 $\xi_i\,(i=1,2,\cdots,k)$，作积分和（也称 Riemann 和）

$$\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(I_i)./\ S(f,\pi)$$

日期: /

记
$$\|\pi\| = \max(\mathrm{diam}(I_1), \mathrm{diam}(I_2), \cdots, \mathrm{diam}(I_k)),$$
这里 $\mathrm{diam}(I_i)$ 是矩形 I_i 的对角线的长度，我们称 $\|\pi\|$ 为分割 π 的宽度.

令 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$，称 ξ 为积分和(1)的值点向量，称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 为值点.

若 $\exists A$. st. $\forall$ 给定的 $\varepsilon>0$. $\exists \delta>0$，对任意分割满足 $\|\pi\|<\delta$ 时，不论 ξ_i 在 I_i 中如何选择，有 $\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)-A\right|<\varepsilon$，称 f 在 I 上可积. 记 A 称作矩形 I 上的二重积分. 记作 $\int_I f d\sigma$. $\iint_I f(x,y)dxdy$，f 为被积函数，I 为积分区域，x,y 为积分变量，$d\sigma$ 为面积元

该过程用"ε-δ"语言定义，为极限过程，写作 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)=A$

例：f 在 I 上为常数 c，则 $\int_I f d\sigma = c\sigma(I)$

$$\text{左}=\int_I f d\sigma=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)=\lim_{\|\pi\|\to 0} c\sum_{i=1}^{k}\sigma(I_i)=c\sigma(I)$$

下面探讨可积函数的性质. 即若 f 可积，可以得到什么性质？

性质的证明与一元情形下极为相似.

2. 性质

① 可积 $\Rightarrow$ 有界

f 在 I 上可积，则 f 必在 I 上有界

pr. 设 f 在 I 上积分为 J.

由定义，$\exists\delta$. st. $\forall$ 分割 $\|\pi\|<\delta$. 有 $\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)-J\right|<1$ (※)

故 $\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)\right| \le \left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)-J\right|+|J|<|J|+1$

取出 1 个面积微元，有 $|f(\xi_1)|\sigma(I_1)<|J|+1+\left|\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)\right|$ (三角不等式)

$$\Rightarrow |f(\xi_1)|<\frac{1}{\sigma(I_1)}\left(|J|+1+\left|\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)\right|\right)$$

(※) 对给定的一组分割，任意值点序列均成立

日期:　　/

特别地，固定 $\xi_2、\xi_3、\cdots、\xi_k$

故上式的右端为1个确定的实数（$\sigma(I_1)$ 由分割确定、$\xi_2、\xi_3\cdots\xi_k$ 被固定）

知在 σ_1 上 f 为有界函数

同理在其余面积微元上有界，由微元的有限性知 f 在 I 上有界

该证明本质上考虑到了积分的定义，

"对∀分割‖Δ‖"、"∀值点序列"，本质为一个非常强的条件

② 线性运算性质

$f、g$ 在 I 上可积，则对∀常数 $\alpha、\beta$，有：

$\alpha f+\beta g$ 在 I 上可积，且 $\int_I(\alpha f+\beta g)d\sigma=\alpha\int_I fd\sigma+\beta\int_I gd\sigma$

pr、由定义即知

若 $f、g$ 在 I 上可积，则 $f\pm g$ 在 I 上可积，且 $\int_I(f\pm g)d\sigma$

若 f 在 I 上可积，则 cf 在 I 上可积，且 $\int_I cfd\sigma=c\int_I fd\sigma$

③ 保号保序性

若 $f、g$ 在 I 上可积，

$f\geq 0$，则 $\int_I fd\sigma\geq 0$

$f\geq g$，则 $\int_I fd\sigma\geq\int_I gd\sigma$

注意到可积为某一函数 f 在 D 上的性质

日期: /

§10.2 可积性理论与Lebesgue定理

先来探讨f的可积性，怎样的f为可积的

在一元函数中有可积性理论与Lebesgue定理判定f的可积性

1、可积性理论（由于f可积⇒f有界，故讨论建立在有界函数的条件下）

① 给出一些定义/定义的等价表述

(1) 上和、下和

在给定函数 f 之后，积分和(1)可以写为

$$S(f,\pi)=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i).$$

这说明一个 Riemann 和既依赖于 I 的分割 π，又依赖于值点 $\xi_i \in I_i (i=1,2,\cdots,k)$ 的选取. 令

$$m_i=\inf f(I_i),\quad M_i=\sup f(I_i)\quad (i=1,2,\cdots,k).$$

定义 （由于f有界则必有上确界与下确界）

$$\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{k} m_i\sigma(I_i),\quad \overline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{k} M_i\sigma(I_i),$$

分别称它们为函数 f 关于分割 π 的**下和**与**上和**，它们只与分割 π 有关. 显然可见，对同一分割 π 而言，任何积分和都介于下和与上和之间，即

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant S(f,\pi)\leqslant \overline{S}(f,\pi).$$

由定义即知上和下和既依赖分割π，而一般的和式取决于分割与值点序列

(2) 振幅

$m=\inf f(I)$　$M=\sup f(I)$

$\omega=M-m$　$\omega_i=M_i-m_i$

将 ω、ω_i 称作振幅

ω 有等价表述为 $\omega=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$　$x_1,x_2\in I$

pr.　$M=\sup f(I)$　即有 $\forall f(x)\leq M$，且 $\exists x_1$, s.t. $\forall \varepsilon$, $f(x_1)>M-\varepsilon$

$m=\inf f(I)$　即有 $\forall f(x)\geq m$，且 $\exists x_2$, s.t. $\forall \varepsilon$, $f(x_2)<m+\varepsilon$

故有 $\forall x_1,x_2$, $|f(x_1)-f(x_2)|\leq M-m$，且 $\exists x_1,x_2$, s.t. $|f(x_1)-f(x_2)|>M-m-2\varepsilon$, $\forall\varepsilon$

由确界原理, $\omega=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$ $x_1,x_2\in I$

② 更细的分割

df. $T=T_x\times T_y$, $T'=T_x'\times T_y'$ 为两个分割

若 $T_x\le T_x'$, $T_y\le T_y'$, 即 T_x', T_y' 均在实数轴上为更细的分割

(注: T'为T更细的分割, 即T'由T添加k个分点得到, 记作 $T\le T'$)

为了方便研究, 当且仅当T'在x,y方向均比T更细时称T'为更细分割

有: $T\le T'$时

$$\underline{S}(f,T)\le \underline{S}(f,T')\le \overline{S}(f,T')\le \overline{S}(f,T)$$

即在细分下, 上和不增, 下和不减

pr. 设 $T=T_x\times T_y$ T_x, T_y 为 $[a,b]$、$[c,d]$ 的分割且将区间分成n个、m个片段

令 $T_1=T_x'\times T_y$ T_x' 由 T_x 添加一个分点得到

即 T_x': $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x^*<x_i<\cdots<x_n=b$

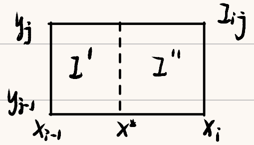
比较两次分割的不同

T' 即将第 i,j $(j=1,2,\ldots,m)$ 个小矩形再次分块

对给定的 j,

将 $\inf f(I_{ij})\sigma(I_{ij})$ 分为 $\inf f(I')\sigma(I')+\inf f(I'')\sigma(I'')$ 两部分

其中 $\sigma(I')+\sigma(I'')=\sigma(I_{ij})$, 且类似于分割:



而 $\inf f(I')\sigma(I')+\inf f(I'')\sigma(I'')$

$\ge \inf f(I_{ij})(\sigma(I')+\sigma(I''))$

故 $\underline{S}(f,T')-\underline{S}(f,T)\ge 0$ (对j求和)

对 T_y' 为 T_y 添加了分点的分割同理可知上述结论成立

日期: /

即证明了"下和不减"，同理可证明"上和不增"

③ 任意下和 ≤ 上和

即 $\forall \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ 为 I 上的分割，有：$\underline{S}(f,\mathcal{Z}_1) \le \overline{S}(f,\mathcal{Z}_2)$

pr. 将 $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_{1x} \times \mathcal{Z}_{1y}$，$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_{2x} \times \mathcal{Z}_{2y}$ 合并，

即得到 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_x \times \mathcal{Z}_y$，$\mathcal{Z}_x$ 包含 $\mathcal{Z}_{1x}$、$\mathcal{Z}_{2x}$ 的所有分点，$\mathcal{Z}_y$ 包含 $\mathcal{Z}_{1y}$、$\mathcal{Z}_{2y}$ 的所有分点。

则 $\mathcal{Z}_1 \le \mathcal{Z}$，$\mathcal{Z}_2 \le \mathcal{Z}$，有

$\underline{S}(f,\mathcal{Z}_1) \le \underline{S}(f,\mathcal{Z}) \le \overline{S}(f,\mathcal{Z}) \le \overline{S}(f,\mathcal{Z}_2)$

该定理表明下和有上界，为任意给定的分割的上和；

上和有下界，为任意给定的分割的下和。

便有如下定义：

④ 上积分、下积分

df. $\underline{\int}_I f\,d\sigma = \sup\limits_{\mathcal{Z}} \underline{S}(f,\mathcal{Z})$ 为 f 在 I 上的下积分，写作 $\underline{I}$

$\overline{\int}_I f\,d\sigma = \inf\limits_{\mathcal{Z}} \overline{S}(f,\mathcal{Z})$ 为 f 在 I 上的上积分，写作 $\overline{I}$

由定义即知 $\underline{S}(f,\mathcal{Z}_1) \le \underline{\int}_I f\,d\sigma \le \overline{\int}_I f\,d\sigma \le \overline{S}(f,\mathcal{Z}_2)$ 对 $\forall \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ 均成立

有：$\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to 0} \overline{S}(f,\mathcal{Z}) = \overline{I}$，$\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to 0} \underline{S}(f,\mathcal{Z}) = \underline{I}$

pr. Lemma. (估计更细分割的上和、下和与原分割的差)

对给定的 j，$\inf f(I')\sigma(I') + \inf f(I'')\sigma(I'') - \inf f(I)\sigma(I)$

$\le (M_{ij} - m_{ij})\sigma(I) \le w_{ij}\,\sigma(I)$ $\quad w_{ij}$ 表示第 i,j 个矩形上的振幅

$\le w\,\sigma(I)$

故对 j 求和，有 $\underline{S}(f,\mathcal{Z}') - \underline{S}(f,\mathcal{Z}) \le w(d-c)\|\mathcal{Z}\|$

$\mathcal{Z}'$ 为 $\mathcal{Z}_x$ 添加了1个分点，$\mathcal{Z}_y$ 不变的分割

日期:　　/

由归纳可知

若 $\mathcal{T}'$ 为 $\mathcal{T}_x$ 添加 p 个分点，$\mathcal{T}_y$ 添加 q 个分点得到的分割，有

$\underline{S}(f,\mathcal{T}') \le \underline{S}(f,\mathcal{T}) + [p(d-c)+q(b-a)]w\|\mathcal{T}\|$

同理有 $\overline{S}(f,\mathcal{T}') \ge \overline{S}(f,\mathcal{T}) - [p(d-c)+q(b-a)]w\|\mathcal{T}\|$

现在只需证明 $\lim\limits_{\|\mathcal{T}\|\to 0} \underline{S}(f,\mathcal{T}) = \underline{I}$，另一极限过程同理

由定义 $\underline{I} = \sup \underline{S}(f,\mathcal{T})$

故对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 1个 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_x \times \mathcal{T}_y$，s.t. $\underline{S}(f,\mathcal{T}_0) > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$

设 $\mathcal{T}_x$ 有 p 个内分点，$\mathcal{T}_y$ 有 q 个内分点

只需证明对 $\|\mathcal{T}\| < \varepsilon \cdot \dfrac{1}{2w[p(d-c)+q(b-a)]+1}$

一定有 $\underline{S}(f,\mathcal{T}) > \underline{I} - \varepsilon$

将 $\mathcal{T}_0$ 与 $\mathcal{T}$ 并合为 $\mathcal{T}'$，则 $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_x' \times \mathcal{T}_y'$，$\mathcal{T}_x'$ 为 $\mathcal{T}_x$ 至多添加 p 个分割点，

$\mathcal{T}_y'$ 为 $\mathcal{T}_y$ 至多添加 q 个分割点

则有 $\underline{S}(f,\mathcal{T}) \ge \underline{S}(f,\mathcal{T}') - [p(d-c)+q(b-a)]w\|\mathcal{T}\|$

$\ge \underline{S}(f,\mathcal{T}_0) - [p(d-c)+q(b-a)]w\|\mathcal{T}\|$

$> \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} > \underline{I} - \varepsilon$

即对分割的宽度作极限过程，下和结果为下积分，上和结果为上积分

如上准备工作完成后，给出可积性理论的最终结果

⑤可积性理论

设 f 在 $I = [a,b]\times[c,d]$ 上有界，则有：

(1) f 在 I 上可积

(2) $\lim\limits_{\|\mathcal{T}\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{k} w_i \sigma(I_i) = 0$，$w_i = M_i - m_i$ $(i=1,2\cdots k)$

日期:　　/

M_i、m_i 分别为 f 在 I_i 上的上、下确界

(3) $\underline{\int_I} f d\sigma = \overline{\int_I} f d\sigma$

(4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 1 分割 τ. st. $\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) < \varepsilon$

以上条件等价

我们先利用 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), (3) $\Leftrightarrow$ (4) 的方式来证明可积性理论的最后结果

pr. (1) $\Rightarrow$ (2)

f 可积, 设 $I = \int_I f d\sigma$. 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, st. $\|\tau\| < \delta$ 时,

有 $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=1}^{k} f(\xi_k)\sigma(I_k) < I + \frac{\varepsilon}{3}$

由于对分割 τ 的任意值点均成立

故 $I - \frac{\varepsilon}{3} < \underline{S}(f,\tau) \leq \overline{S}(f,\tau) < I + \frac{\varepsilon}{3}$

即有 $0 \leq \sum_{i=1}^{k} w_i \sigma(I_i) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{\|\tau\| \to 0} \sum_{i=1}^{k} w_i \sigma(I_i) = 0$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$0 \leq \overline{\int_I} f d\sigma - \underline{\int_I} f d\sigma \leq \overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) = \sum_{i=1}^{k} w_i \sigma(I_i)$

而 $\overline{\int_I} f d\sigma - \underline{\int_I} f d\sigma$ 为一仅由 f 确定的值,

对 $\sum_{i=1}^{k} w_i \sigma(I_i)$ 作 $\|\tau\| \to 0$ 的极限 有 $\overline{\int_I} f d\sigma = \underline{\int_I} f d\sigma$

(3) $\Rightarrow$ (1)

设 $I = \overline{\int_I} f d\sigma = \underline{\int_I} f d\sigma$

则对 $\forall$ 分割 τ, 有 $\underline{S}(f,\tau) \leq \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) \leq \overline{S}(f,\tau)$

对两端作 $\|\tau\| \to 0$ 的极限, 有 $\lim_{\|\tau\| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) = I$

即 f 可积. 且 $\int_I f d\sigma = I$

(3) $\Rightarrow$ (4)

令 $A=\underline{\int}_I f d\sigma=\overline{\int}_I f d\sigma$

由下积分定义, $\forall \varepsilon>0$, $\exists I$ 的一个分割 π_1, st. $\underline{S}(f,\pi_1)>A-\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists I$ 的一个分割 π_2, st. $\overline{S}(f,\pi_2)<A+\frac{\varepsilon}{2}$

将 π_1 与 π_2 合并记作 π, 即有

$A-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}(f,\pi_1)\le\underline{S}(f,\pi)\le\overline{S}(f,\pi)\le\overline{S}(f,\pi_2)<A+\frac{\varepsilon}{2}$

故 $\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$　π 为满足条件的分割

(4) $\Rightarrow$ (3)

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\pi$. st. $\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$

$0\le\overline{\int}_I f d\sigma-\underline{\int}_I f d\sigma\le\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$

由 ε 任意性知 $\overline{\int}_I f d\sigma=\underline{\int}_I f d\sigma$

依据课本再给出一种漂亮的证明, 在已知 (3)$\Leftrightarrow$(4) 条件下证明 (1)$\Leftrightarrow$(3)

pr.　(1) $\Rightarrow$ (3)

f 在 I 上可积, 设 $\int_I f d\sigma=A$

故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 1个分割 π, st. 对 $\forall$ 值点 $\xi_i\in I_i$

有 $A-\varepsilon<\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)<A+\varepsilon$

故 $A-\varepsilon\le\underline{S}(f,\pi)\le\overline{S}(f,\pi)\le A+\varepsilon$

作 $\|\pi\|\to 0$ 的极限. 有 $A-\varepsilon\le\underline{\int}_I f d\sigma\le\overline{\int}_I f d\sigma\le A+\varepsilon$

令 $\varepsilon\to 0$. 有 (3) 成立.

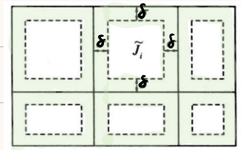
(3) $\Rightarrow$ (1)

设 $A=\underline{\int}_I f d\sigma=\overline{\int}_I f d\sigma$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$分割 $T_\varepsilon=\{J_1,J_2,\cdots,J_t\}$，

st. $\overline{S}(f,T_\varepsilon)-\underline{S}(f,T_\varepsilon)<\varepsilon$

将矩形 J_i 每一边平行地向矩形内部收缩同一距离 $\delta>0$，如下图：



作为开矩形 $\tilde{J}_i\subset J_i\ (i=1,2,\cdots,t)$

令 $K=I\cap\left(\bigcup_{i=1}^{t}\tilde{J}_i\right)^c$ 为闭集（闭集的交）

取充分小的 δ，st. $\sigma(K)<\varepsilon$，K 即为颜色部分面积

设 I 的 $\forall$ 分割 $T=\{I_1,\cdots,I_k\}$ 满足 $\|T\|<\delta$，对 $\forall$ 值点向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$

应证明：$\left|\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(I_i)-A\right|<\varepsilon\quad\forall\varepsilon$

有 $\underline{S}(f,T)\le S(f,T)\le\overline{S}(f,T)$，$\underline{S}(f,T)\le A\le\overline{S}(f,T)$（由A定义）

故 $|S(f,T)-A|\le\overline{S}(f,T)-\underline{S}(f,T)=\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)\sigma(I_j)$

$\triangleq\Sigma_1+\Sigma_2$

其中 $\Sigma_1=\sum_{I_j\subset K}(M_j-m_j)\sigma(I_j)\qquad\Sigma_2=\sum_{I_j\not\subset K}(M_j-m_j)\sigma(I_j)$

对 Σ_1：f 有界，设 $|f(p)|\le M\quad p\in I$

$\Sigma_1\le 2M\sum_{I_j\subset K}\sigma(I_j)\le 2M\sigma(K)<\cdots$

对 Σ_2：对 $I_j\not\subset K$ 故 $\exists i$，st. $I_j\cap\tilde{J}_i\ne\emptyset$

由于 $\|T\|<\delta$，有 $I_j\subset J_i$

故 $\Sigma_2=\sum_{i=1}^{t}\sum_{I_j\subset J_i}(M_j-m_j)\sigma(I_j)$

$\le\sum_{i=1}^{t}(\sup f(J_i)-\inf f(J_i))\sum_{I_j\subset J_i}\sigma(I_j)$

$\le\sum_{i=1}^{t}(\sup f(J_i)-\inf f(J_i))\sigma(J_i)$

$=\overline{S}(f,T)-\underline{S}(f,T)<\varepsilon$

故 $|S(f,T)-A|<(2M+1)\varepsilon$ 表明 f 在 A 上可积

日期: /

且 $A=\int_I f d\sigma=\underline{\int_I} f d\sigma=\overline{\int_I} f d\sigma$

本证明先给出了一个分割 π_ε，该分割来源于 (3) <=> (4)，(4) 的存在性，对该分割做了一些变换得到新分割，该新分割只需满足对 $\|\pi\|$ 的限制，因有积分和与上下积分差值为 ε 即为 Riemann 可积的定义

作为可积性理论的应用，有如下例子：

例、闭矩形上的连续函数可积

pr. f 连续，闭矩形为紧集，则 f 一致连续

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$. st. $x,y\in I$，且 $\|x-y\|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{\sigma(I)}$

对 I 的分割 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots I_k\}$

设 $M_i=f(s_i)$，m ...，则 $\|s_i-t_i\|\leq\|\pi\|<\delta$

故 $\sum_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)=\sum_{i=1}^{k}(f(s_i)-f(t_i))\sigma(I_i)<\sigma(I)\cdot\frac{\varepsilon}{\sigma}=\varepsilon$

即 f 可积

例、(二维中的 Dirichlet 函数)

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，$x,y\in\mathbb{Q}$ <=> (x,y) 为 $\mathbb{R}^2$ 中有理点

df. $D(p)=\begin{cases}1 & p\text{ 为 }\mathbb{R}^2\text{ 中有理点}\\ 0 & p\text{ 不为 }\mathbb{R}^2\text{ 中有理点}\end{cases}$

对 $\mathbb{R}^2$ 中任意闭矩形，有 D 在 I 上不可积

pr. $\underline{\int_I} f d\sigma=0$，$\overline{\int_I} f d\sigma=\sigma(I)>0$

例、f 在 I 上可积，f 在 I 上任一子矩形可积

pr. 子矩形的任意分割必然可由原矩形的某一分割得到

故 $\sum_{i=1}^{k'}\omega_i'\sigma(I_i')\leq\sum_{i=1}^{k}\omega_i\sigma(I_i)$

日期:　　/

其中 I_i' $(i=1,2\cdots,k')$ 为子矩形的分割，

I_i $(i=1,2\cdots,k)$ 为原矩形的分割

由 f 在 I 上可积，$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k} w_i\sigma(I_i)=0$

故 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k'} w_i\sigma(I_i')=0$　即 f 在子矩形上可积

2. Lebesgue 定理

① 零测集与零面积集定义

二维零测集

设 $B\subset\mathbb{R}^2$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 可数个闭矩形序列 $\{I_i\}$ $(i=1,2\cdots)$

s.t. $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon$

称 B 为二维零测集

零面积集

设 $B\subset\mathbb{R}^2$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 有限个闭矩形 $I_1,I_2,\cdots,I_m$

s.t. $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon$

称 B 为零面积集

显然零面积集为二维零测集，但零测集不一定为零面积集

例. $B=\{(x,y):(x,y)\in[0,1]^2,(x,y)$ 为有理点$\}$

在后续零测集与零面积集性质中证明

定义中的闭矩形可换为开矩形，具体使用时应依据情况，利用集合的拓扑性质

(测度与更深入的理论将在实分析中学到)

②零测集与零面积集性质

(1) $B\subset\mathbb{R}^2$ 为零测集，有 $B^\circ=\phi$

日期:　　/

pr. 若 $B^\circ \neq \emptyset$，若 $x \in B^\circ$，$\exists r>0$, s.t. $B_r(x) \subset B$

对 $\forall$ 覆盖 B 的矩形族，面积均大于 $S(B_r(x))$，与零测集矛盾

(2) 至多可数集为零测集

pr. 作球 $I_i = B_{r_i}(a_i)$　$r_i = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{2})^{i+1}}$　$\forall \varepsilon>0$

显然至多可数集 $\{a_1, a_2 \cdots a_n \cdots\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

而 $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) = \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \pi\varepsilon \to 0\ (\varepsilon \to 0)$

注：零测集不一定为至多可数集，如连续函数 f 在闭区间内的图象即为反例（后续证明）

(3) 至多可数个零测集的并为零测集

pr. 设 $A_1, A_2 \cdots A_n \cdots$ 为可数个零测集

A_n 为零测集，$\exists$ 其覆盖 $\{I_{ni},\ n, i \in N^*\}$, st. $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$，且 $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_{ni}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$

故 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}\right)$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_{ni}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$

故 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 零测

(4) 有限个零面积集的并为零面积集

pr. 设 $B_1, B_2 \cdots B_m$ 为有限个零面积集

B_j 为零面积集，$\exists$ 有限个覆盖 $\{I_{jk}, j, k \in N^*\}$ st. $B_j \subset \bigcup_{k=1}^{k_j} I_{jk}$，且 $\sum_{k=1}^{k_j} \sigma(I_{jk}) < \varepsilon$

故 $\bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{k=1}^{k_j} I_{jk}\right)$

且 $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \sigma(I_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{m} \varepsilon = m\varepsilon$

故 $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ 零面积

(5) B 为零面积集 $\Leftrightarrow$ $\bar{B}$ 为零面积集

pr. $\Leftarrow$ 自然成立

日期: /

$\Rightarrow$ 由定义, $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ 有限个闭矩形 $I_1, I_2 \cdots I_m$. st. $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$, $\sum_{i=1}^{m} \sigma(I_i) < \varepsilon$

故 $\bar{B} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} I_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{I_i} = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ 故 $\bar{B}$ 为零面积集

例. $B=\{(x,y): (x,y)\in[0,1]^2, (x,y)$ 为有理点$\}$

B 可数, 故 B 零测, 而 $\bar{B}=[0,1]^2$ 不为零测集

表明 B 零测 $\not\Rightarrow$ $\bar{B}$ 零测

同时说明零测集不一定为零面积集 (否则若 B 零面积, $\bar{B}$ 零面积, 必然零测)

(6) B 有界闭, 则 B 零测 $\Leftrightarrow$ B 零面积

pr. $\Rightarrow$ 自然成立

$\Leftarrow$ B 零测, 故 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \{I_i\}$ st. $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon$

由有限覆盖, 从 $\{I_i\}$ 中可选出有限个开矩形覆盖 B

其面积和自然 $<\varepsilon$, 故 B 为零面积集

(7) 零测集的子集为零测集, 零面积集的子集为零面积集

③ 常见的零面积集.

设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 为一段连续参数曲线, 且至少有1个分量有连续导数, 则 B 为零面积集

即 $B: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$

$x'(t), y'(t)$ 至少有1个连续

pr. $x=x(t)$ $y=y(t)$ $\alpha \le t \le \beta$

$x, y \in C([\alpha,\beta])$ 不妨 $y \in C^1([\alpha,\beta])$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时, 有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$ ($x(t)$ 一致连续)

作有分割 $\|\lambda\|<\delta$, $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$

日期: /

$s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ 时, $|x(s)-x(t)|<\varepsilon$

令 $a_i = \min x[t_{i-1}, t_i]$, $b_i = \max x[t_{i-1}, t_i]$

即有 $b_i - a_i < \varepsilon$ (类似于用振幅证连续函数可积的手法)

令 $c_i = \min y[t_{i-1}, t_i]$, $d_i = \max y[t_{i-1}, t_i]$

$I_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \quad i=1,2,\cdots,m$

故当 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ 时, $(x(t), y(t)) \in I_i$, 即 $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_i$

$y \in C^1[\alpha, \beta]$, 故 y' 在 $[\alpha, \beta]$ 上有界, 设 $|y'| \le M$

由微分中值定理, $d_i - c_i \le M(t_i - t_{i-1}) \quad (i=1,2,\cdots,m)$

故 $\sum_{i=1}^{m} \sigma(I_i) = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)(d_i - c_i) < M\varepsilon \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) = M\varepsilon(\beta - \alpha)$

由 ε 任意性知 B 为零面积集

特别地, 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 图像 $G(f) = \{(x, f(x)), x \in [a,b]\}$ 为零面积集

光滑曲线与逐段光滑曲线(可分解为可数个光滑曲线的并)均为零面积集

故 R^2 中连续函数的图象 $G(f)$ 零面积, 必然零测, 但为不可数集

R 上的任意区间不零测, 但在 R^2 上甚至为零面积集, 必然零测

④ 一点处的振幅

在可积性理论中已经定义了区域 I 上的振幅

$f: B \subset R^2 \to R \quad \forall x \in B, \forall r>0$, 令 $I_{x,r} = B \cap B_r(x)$

$\omega_f(x,r) \triangleq \sup |f(x_1) - f(x_2)|$, $x_1, x_2 \in I_{x,r}$ 为 f 在 $I_{x,r}$ 上的振幅

$\omega_f(x) \triangleq \lim_{r \to 0^+} \omega_f(x,r)$ 为 f 在 $x \in B$ 处的振幅

($\omega_f(x,r) \ge 0$ 且随 r 递减时递减, 故该极限存在)

下面回到 Lebesgue 定理的证明

日期:　　　/

⑤ Lebesgue 定理及其证明

有界函数 f 在 I 上可积 $\Leftrightarrow$ $D(f)$ 为零测集

$D(f)$ 表示 f 在 I 上全体不连续点构成的集合，$D(f)=\{x\in I, f在x处不连续\}$

pr.

Lemma 1. $B\subset\mathbb{R}^2$，f 在 $x\in B$ 连续 $\Leftrightarrow$ $\omega_f(x)=0$

$\Rightarrow$ f 在 $x\in B$ 处连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists r>0$ 充分小，st. $y\in B_r(x)$ 时，

$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $\forall y_1, y_2\in B_r(x)$，有

$|f(y_1)-f(y_2)|\le|f(y_1)-f(x)|+|f(x)-f(y_2)|<\varepsilon$

则 $\omega_f(x,r)\le\varepsilon$　令 $r\to0^+$，由 ε 任意性，$\omega_f(x)=0$

$\Leftarrow$ $\omega_f(x)=0$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists r>0$，st. $\omega_f(x,r)<\varepsilon$

故 $\forall y\in B_r(x)$，有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$

表明 x 处连续性

Lemma 2. $\delta>0$，记 $D_\delta=\{x\in I, \omega_f(x)\ge\delta\}$，$D(f)$ 为 f 在 I 上不连续点的全体

有 $D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$

$D_{\frac{1}{n}}\subseteq D(f)$　故 $\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}\subset D(f)$

$\forall x\in D(f)$　有 f 在 x 处不连续，则 $\omega_f>0$

取充分大的 m 使得 $\omega_f>\frac{1}{m}$　故 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ $D(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$

即证明了 $D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$

Lemma 3.

日期: /

f定义在有界闭矩形I上

若∃一列开矩形 $I_j\,(j=1,2\cdots)$, s.t. $D(f)\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$

记 $K=I\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$，对 $\forall\,\varepsilon>0$

$\exists\,\delta$, s.t. $x\in K$, $y\in I$，且 $\|x-y\|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

(反证) 若结论不成立，$\exists\,\varepsilon_0>0$, $s_n\in K$, $t_n\in I$, $\|s_n-t_n\|<\frac{1}{n}$，但

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$

$s_n\in K\subset I$，I为有界闭，故∃ $\{s_n\}$ 子列 $\{s_{k_n}\}$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}s_{k_n}=s^*$

$s^*\in K$ (由于K为闭集)

故 $\|t_{k_n}-s^*\|\leq\|t_{k_n}-s_{k_n}\|+\|s_{k_n}-s^*\|$

$<\frac{1}{n}+\|s_{k_n}-s^*\|$

令 $n\to\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{k_n}=s^*$

$s^*\in K$ 则 f在 s^* 处连续，与 $|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geq\varepsilon_0$ 矛盾

回到Lebesgue定理的证明

$\Rightarrow$ 由Lemma 2，性质(3)，只需证 $D_{\frac{1}{n}}$ 为零测集

事实上 $D_{\frac{1}{n}}$ 为零面积集

因f在I上可积，由可积性定理，

对 $\forall\,\varepsilon>0$，∃I上的一个分割 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$ s.t. $\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)<\frac{\varepsilon}{n}$

记 $L(\pi)$ 为所有分割线构成的集合，$L(\pi)$ 为零面积集

令 $E_n=D_{\frac{1}{n}}\setminus L(\pi)$ 只需证 E_n 为零面积集

$I\setminus L(\pi)=\bigcup_{i=1}^{m}I_i$ $\quad I_i\,(i=1,2\cdots,m)$ 均为开矩形

即有 $E_n=D_{\frac{1}{n}}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m}I_i\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\left(D_{\frac{1}{n}}\cap I_i\right)\subset\bigcup\left\{I_i:D_{\frac{1}{n}}\cap I_i\neq\varphi\right\}$

日期:　　/

表明 E_n 被一列开矩形覆盖，且其中均含有 $D_{\frac{1}{n}}$ 中的点

$\forall a \in D_{\frac{1}{n}} \cap I_i$, $\exists r$ st. $B_r(a) \subset I_i$

$w_i \triangleq f$ 在 I_i 上振幅，$w_f(a,r) \triangleq f$ 在 $B_r(a)$ 上振幅

$w_i \geq w_f(a,r) \geq w_f(a) \geq \frac{1}{n}$

用 $\sum'$ 表示对 $D_{\frac{1}{n}} \cap I_i \neq \phi$ 的 i 求和，

故 $\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{i=1}^{m} w_i \sigma(I_i) \geq \sum_i' w_i \sigma(I_i) \geq \frac{1}{n} \sum_i' \sigma(I_i)$

$\Rightarrow \sum_i' \sigma(I_i) < \varepsilon \quad \Rightarrow E_n$ 为零面积集

$\Leftarrow$ $D(f)$ 为零测集，

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一列开矩形 $J_i (i=1,2\cdots)$, st. $D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(J_i) < \frac{\varepsilon}{2w}$

w 为 f 在 I 上振幅

令 $K = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$

由 Lemma 3, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$. st. $x \in K$, $y \in I$, 且 $\|x-y\| < \delta$ 时，

有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4\sigma(I)}$

取 $T = \{I_1, I_2 \cdots I_m\}$, $\|T\| < \delta$,

令 $\sum_{i=1}^{m} w_i \sigma(I_i) = \sum_1 w_i \sigma(I_i) + \sum_2 w_i \sigma(I_i)$

$\sum_1$ 表示对 K 和 I_i 相交的 i 求和，$\sum_2$ 表示对 K 和 I_i 不相交的 i 求和

$K \cap I_i \neq \phi$, 由 Lemma 3,

$w_i = \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| : z_1, z_2 \in I_i\}$

$\leq \sup\{|f(z_1) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(z_2)| : z_1, z_2 \in I_i, y_i \in K \cap I_i\}$

$\leq \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)}$

$\Rightarrow \sum_1 w_i \sigma(I_i) \leq \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)} \sigma(I) = \frac{\varepsilon}{2}$

日期: /

$K \cap I_i = \phi$,

则 $x \in I_i$ 时, $x \notin K$. $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$

$\Rightarrow I_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$

故 $\sum_2 \sigma(I_i) \leq \sum_2 \sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i) < \frac{\varepsilon}{2w}$

$\Rightarrow \sum_2 w_i \sigma(I_i) \leq w \sum_2 \sigma(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}$

即知 $\sum_{i=1}^{m} w_i \sigma(I_i) < \varepsilon$. 故 f 在 I 上可积

⑥ 由 Lebesgue 得到结论

(1) 对零面积集上函数值改变, 不影响积分结果.

设 $f: I \to R$, f 有界. 若集合 $B = \{x \in I, f(x) \neq 0\}$ 为一零面积集,

则 f 在 I 上可积, 且 $\int_I f d\sigma = 0$

pr. $I^\circ \setminus \bar{B}$ 为一个开集

$I^\circ \setminus \bar{B} = I^\circ \cap (R^2 \setminus \bar{B})$ 中的点均为 f 的连续点.

故 $D(f) \subset \partial I \cup \bar{B}$

而 ∂I、$\bar{B}$ 均为零面积集, 故 $D(f)$ 也为零面积集

由 Lebesgue 知. f 在 I 上可积.

下计算积分:

对 I 的任意分割 $T = \{I_1, I_2 \cdots I_k\}$, 作 $S(f, T)$

$\bar{B}$ 为零面积集. 故不 $\exists i$. s.t. $I_i \subset B$

$\Rightarrow \forall I_i$ 中. $\exists \xi_i$ s.t. $f(\xi_i) = 0$

此时 Riemann 和为 0

由积分存在性知 $\int_I d\sigma = 0$

日期: /

f, g 在 I 上有界，且集合 $B=\{x\in I, f(x)\neq g(x)\}$ 为一零面积集，

那么若 f, g 中有一个在 I 上可积，则另一个在 I 上也可积，且 $\int_I f d\sigma=\int_I g d\sigma$

pr. 不妨设 g 可积，则使 $f-g$ 不为0点集为 B

由上可知 $f-g$ 在 I 上可积，且 $\int_I (f-g)d\sigma=0$

故 $f=(f-g)+g$ 可积，且 $\int_I f d\sigma=\int_I (f-g)d\sigma+\int_I g d\sigma=\int_I g d\sigma$

(2) 可积函数积与商的可积性

f, g 可积，则 $f\cdot g$ 可积；当 g 在 I 上不取0且 $\frac{f}{g}$ 在 I 上有界，则 $\frac{f}{g}$ 可积

pr. (1) f 在 x_0 处连续，g 在 x_0 处连续，

则 fg 在 x_0 处连续

故 $D(fg)\subset D(f)\cup D(g)$

$D(f)$、$D(g)$ 零测 $\Rightarrow$ $D(fg)$ 零测

f, g 有界 $\Rightarrow$ fg 有界

由Lebesgue知 $f\cdot g$ 可积、

(2) 先证明 f 可积，若 $\frac{1}{f}$ 有界且 f 不取0值，则 $\frac{1}{f}$ 可积

f 连续 $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{f}$ 连续

故 $D(f)=D(\frac{1}{f})$ $D(\frac{1}{f})$ 零测

$\frac{1}{f}$ 有界，由Lebesgue知 $\frac{1}{f}$ 可积、

(3) 综合(1)(2)知

当 g 在 I 上不取0且 $\frac{f}{g}$ 在 I 上有界，则 $\frac{f}{g}$ 可积

(3) 绝对值函数的可积性与大小关系

f 可积，则 $|f|$ 可积，且 $\left|\int_I f d\sigma\right|\leq\int_I |f| d\sigma$

日期: /

可积性由于 $D(|f|)\subset D(f)$

而 $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$

$\Rightarrow -\int_I |f|d\sigma \le \int_I f d\sigma \le \int_I |f| d\sigma$

即 $\left|\int_I f d\sigma\right| \le \int_I |f| d\sigma$

例、I上可积函数 $f>0$，求证 $\int_I f d\sigma>0$

pr. f可积，故对 $\forall\varepsilon, \exists\delta, \forall \|\lambda\|<\delta, \forall$ 值点序列 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$

记 $A=\int_I f d\sigma$ 由 $f>0$ 知 $A=\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma(I_i)\geqslant 0$

若 $A=0$，则 $\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\sigma(I_i)=0$ $M_i=\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$

由上极限知 $\exists$ 矩形区域的某一分割，st. $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\sigma(I_i)<\varepsilon_1\sigma(I)$ $\forall\varepsilon_1$

故 $\exists i$. st. $M_i<\varepsilon_1$，否则若 $\forall i$ 有 $M_i\geqslant\varepsilon_1$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\sigma(I_i)\geqslant\varepsilon_1\sigma(I)$ 矛盾

故得到了某个闭矩形上函数的上确界 $<\varepsilon_1$

在该闭矩形 I_1' 上 $f>0$，若 $\int_{I_1} f d\sigma>0$.

则 $\exists I_1$ 的某个分割，st. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\eta_i)\sigma(I_{1i})>\varepsilon_0>0$ ε_0 为固定数

将 I_1 的分割向外延伸，此时得到的图形必然由 I 的某个分割得到

该分割的下和 $>\sum\limits_{i=1}^{n} m_i'\sigma(I_{1i})>\varepsilon_0$ $m_i'=\inf\limits_{x\in\sigma(I_{1i})} f(x)$

与 $\lim\limits_{\|\lambda\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma(I_i)=0$ 矛盾

故 $\int_{I_1} f d\sigma=0$

对矩形 I_1' 重复上述操作

故 $\exists I_2'\subset I_1'$. st. $\sup\limits_{x\in I_2'} f(x)<\varepsilon_2$

重复此操作可得到一系列闭集套 $I_1'\supset I_2'\supset\cdots\supset I_n'\supset\cdots$

且 $\sup\limits_{x\in I_n'} f(x)<\varepsilon_n$

最终得到某一点 ξ，$\xi \in I_i'\ (\forall i)$，故 $0 < f(\xi) < \varepsilon_n$

由 ε_n 的任意性知 $f(\xi) = 0$ 与 $f > 0$ 矛盾

故 $\int_I f\,d\sigma > 0$

倘若用 Lebesgue 定理可以大大简化上述证明

pr. I 上 f 可积，则 f 在 I 上必然存在连续点 x_0

$\exists \delta$，st. $\forall x \in B_\delta(x_0)$，有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x)}{2}$

即 $\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$

取 $I_0^\circ \supseteq \overline{B_\delta(x_0)}$

有 $\int_I f\,d\sigma \geqslant \int_{I_0} \frac{f(x_0)}{2}\,d\sigma = \frac{f(x_0)}{2}\sigma(I_0) > 0$

(4) 子区间内可积

$J \subset I$，f 在 I 上可积，则在 J 上可积

例、$(x,y) \in [0,1]^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{q} & x = \frac{n}{m},\ y = \frac{p}{q} \quad (m,n,p,q \in N^*) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明：f 在 $[0,1]^2$ 上可积

该函数为 Riemann 函数的一种推广

pr：只需证 f 在 $[0,1]^2$ 间断点零测

$A = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ x,y \in R\backslash Q\}$

$B = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ x,y \in Q\}$

$C = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ x \in Q,\ y \in R\backslash Q\}$

$D = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ x \in R\backslash Q,\ y \in Q\}$

日期:　　/

则 $[0,1]^2=A\cup B\cup C\cup D$

B 为 $[0,1]^2$ 中有理点集，必零测

C、D 亦为零测集，由于固定 x，$C_0=\{(x_0,y),\ y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$

为线段 $\{(x_0,y)\mid 0\le y\le 1\}$ 的子集，必然零测

故 C 为无多个数个零测集的并必然零测

下记 f 在 A 中每一点连续，$(x_0,y_0)\in A$，$x_0,y_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$f(x_0,y_0)=0$

$\forall\varepsilon>0$，取 $m_0\in\mathbb{N}^*$，s.t. $\frac{1}{m_0}<\frac{\varepsilon}{2}$

x_0 为无理数，故在任何邻域中分母不超过 m_0 的有理数必为有限个

取 $q_0\in\mathbb{N}^*$，s.t. $\frac{1}{q_0}<\frac{\varepsilon}{2}$

取 x_0 的邻域 I，y_0 的邻域 J，$I\times J$ 为 (x_0,y_0) 的邻域

在该邻域中去除上述分母 $\le m_0/\le q_0$ 的点

得到新的邻域，在该邻域中，有 $f(\frac{n}{m},\frac{q}{p})=\frac{1}{m}+\frac{1}{p}<\varepsilon$

$f(x,y)=0$ （x、y 中至少有一者 $\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$）

$\Rightarrow f$ 在 A 上连续

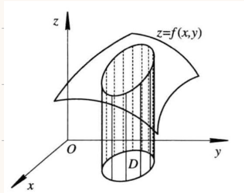
故 $D(f)\subset B\cup C\cup D$ 为零测集

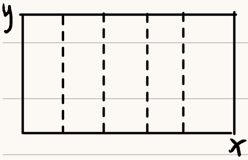
由 Lebesgue 知，f 在 $[0,1]^2$ 上可积

日期:　　　/

§10.3 矩形区域上二重积分的计算

回忆第七章中旋转体体积的计算，模仿上述方法尝试计算曲顶柱体的体积。





不妨设在 I 上 $f\geq 0$，先将 x 方向作分割

即用平行于 oyz 平面的截面截这个几何体，所得即为固定某个 x 得到的截面，其面积为 $\int_c^d f(x,y)dy$

注意：在被积函数 $f(x,y)$ 中视 x 为常数，此时对 y 积分得到的结果可视作关于 x 的表达式，其意义为截面的面积，故 $V=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$

另外地，有 $V'=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$

自然地想到，$V'=V$ 在什么情况下成立？上述讨论建立在极为理想的条件下，给出的两个积分表达式称为累次积分

1. 累次积分

$I=[a,b]\times[c,d]$　$f: I\to R$

记号 $f(x,\cdot)$ 表示将 x 固定在 $[a,b]$ 中，为 y 的函数

若对每个 $x\in[a,b]$，$f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积，

则有 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 为 x 定义在 $[a,b]$ 上的函数

若 φ 在 $[a,b]$ 上可积，称积分 $\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$

$\triangleq\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ 为累次积分

则有另一个累次积分：$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

注意到 $\int_c^d f(x,y)dy$ 不一定存在，但其上下积分均存在，有如下定理。

先记　$\varphi(x)=\underline{\int_c^d} f(x,y)dy$，$\psi(x)=\overline{\int_c^d} f(x,y)dy$

日期:　　/

2.

f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，则 φ 与 ψ 在 $[a,b]$ 上可积，

且 $\int_I f\,d\sigma = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx$

pr. 分别对 $[a,b]$、$[c,d]$ 作分割，$T_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$T_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$

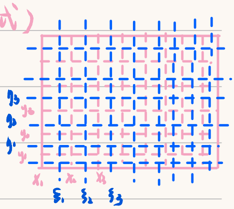
令 $I_i=[x_{i-1},x_i]$，$J_i=[y_{j-1},y_j]$

则子矩形 $I_i\times J_j\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$ 形成了 I 的分割 $T=T_x\times T_y$

令 $A=\int_I f\,d\sigma$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$ st. $\|T\|<\delta$ 时，有 $\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j - A\right|<\varepsilon$

(由于在分割T的宽度确定下，任意分割，任意值点均满足上式)

$\xi_i\in I_i$，$\eta_j\in J_j$ $(i=1,2\cdots n,\ j=1,2\cdots m)$　　该取法实质为



取分割 T_x, T_y，st. $\|T_x\|<\frac{\delta}{\sqrt2}$，$\|T_y\|<\frac{\delta}{\sqrt2}$，则 $\|T\|<\delta$

故

$$A-\varepsilon\le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \sup f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j \le A+\varepsilon$$

$\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j$ 为函数 $f(\xi_i,\cdot)$ 在 T_y 上的下和

$\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j \le \underline{\int_c^d} f(\xi_i,y)\,dy = \varphi(\xi_i)$

同理有 $\sum_{j=1}^m \sup f(\xi_i,J_j)\Delta y_j \ge \psi(\xi_i)$

故　$A-\varepsilon\le\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n\psi(\xi_i)\Delta x_i\le A+\varepsilon$　$\forall\varepsilon>0$

这表明　$\lim\limits_{\|T_x\|\to0}\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{\|T_x\|\to0}\sum_{i=1}^n\psi(\xi_i)\Delta x_i = A$

由积分定义有　$\int_I f\,d\sigma = \int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^b\psi(x)\,dx$

由此即知积分换序的Fubini公式

3. (Fubini公式)

设 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，若对每一个 $x\in[a,b]$，$f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 可积，

日期: /

则 $\int_I f d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$ (1)

同样地，若对 $\forall y \in [c,d]$，$f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

则 $\int_I f d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$ (2)

pr. 只证(1)

f 可积，由2. $\int_I f d\sigma = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \psi(x) dx$

而 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 可积，

故 $\varphi(x) = \psi(x) = \int_c^d f(x,y) dy$

$\Rightarrow \int_I f d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$

故积分换序的一个充分条件为：

设 f 在 $I = [a,b] \times [c,d]$ 上可积，若对每一个 $x \in [a,b]$，$f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 可积，

对 $\forall y \in [c,d]$，$f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

则 $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$

例、设 f 为 $[a,b] \times [c,d]$ 上的连续函数，则有

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$$

用上述公式进行计算

例、$I = [0,2] \times [0,1]$，求 $\iint_I y \sin xy \, dx dy$

$= \int_0^1 dy \int_0^2 \sin xy \, d(xy) = \int_0^1 \left[-\cos xy \Big|_0^2\right] dy = \int_0^1 (1-\cos 2y) dy = \left(y - \frac{1}{2}\sin 2y\right)\Big|_0^1 = 1$

例、$I = [0,1]^2$，求 $\iint_I xy^3 e^{x^2+y^2} dx dy$

$= \int_0^1 dy \int_0^1 xy^3 e^{x^2+y^2} dx = \int_0^1 y^3 \left(\frac{1}{2} e^{x^2+y^2}\Big|_0^1\right) dy = \int_0^1 y^3 \left(\frac{1}{2} e^{y^2+1} - \frac{1}{2} e^{y^2}\right) dy$

$= \frac{1}{4} \int_0^1 y^2 (e^{y^2+1} - e^{y^2}) d(y^2) = \frac{e-1}{4} \int_0^1 y^2 e^{y^2} d(y^2) = \frac{e-1}{4} (y^2-1) e^{y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{4}$

日期: /

例、$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y & x+y\le 1\\ 0 & x+y>1\end{cases}$

求 $\int_I f\,d\sigma$, $I=[0,1]^2$

$$\int_I f\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,dy &= \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy+\int_{1-x}^1 f(x,y)\,dy\\ &= \int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\\ &= y-xy-\tfrac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{y=1-x}\\ &= (1-x)-x(1-x)-\tfrac{1}{2}(1-x)^2\\ &= \tfrac{1}{2}(1-x)^2\end{aligned}$$

故 $\int_I f\,d\sigma=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2dx=-\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

Fubini公式的使用条件是极为必要的，即

① f在I上可积 $\not\Rightarrow$ $\forall x\in[a,b]$, $\int_c^d f(x,y)\,dy$ 均存在

/ $\forall y\in[c,d]$, $\int_a^b f(x,y)\,dx$ 均存在

② $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$, $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$ 都存在且相等 $\not\Rightarrow$ f在$[0,1]^2$上可积.

用以下例子说明

例、①的反例

$(x,y)\in[0,1]^2$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{m}+\frac{1}{q} & x=\frac{n}{m},\ y=\frac{p}{q}\quad (m,n,p,q\in\mathbb{N}^*)\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

$f(x,\frac{p}{q})$ 对 x 在$[0,1]$上可积, $f(\frac{n}{m},y)$ 对 y 在$[0,1]$上不可积

pr. $f(x,\frac{p}{q})=\begin{cases}f(\frac{n}{m},\frac{p}{q})=\frac{1}{m}+\frac{1}{q} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

日期: /

该函数关于x，且在任意点处振幅 $>\frac{1}{q}$

其间断点集不零测 $\Rightarrow f(x,\frac{p}{q})$ 不可积

同理 $f(\frac{n}{m},y)$ 不可积

例. ② 的反例

$(x,y)\in[0,1]^2$,

df. $g(x,y)=\begin{cases}1 & x=\frac{n}{m},\ y=\frac{p}{m}\quad (m,p,n\in N^*)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

则 $\int_0^1 dx\int_0^1 g(x,y)dy$ 与 $\int_0^1 dy\int_0^1 g(x,y)dx$ 存在且相等，但 g 在 $[0,1]^2$ 不可积

该例子可视作某一种狄利克雷函数的推广

pr. step 1. 先证明 g 在 $[0,1]^2$ 不可积

对 g 在 $[0,1]^2$ 内任何分割取上下和

$\overline{S}(g,\mathcal{Z})=1,\ \underline{S}(g,\mathcal{Z})=0$

$\Rightarrow \overline{\int_I} f d\sigma=1,\ \underline{\int_I} f d\sigma=0$ （严格推导并不容易）

故 g 在 $[0,1]^2$ 不可积

step 2. 证明累次积分的存在性

对给定的 $x_0\in[0,1]$

$x_0\in Q$ 时，$g(x_0,y)=\begin{cases}1 & x_0=\frac{n}{m},\ y=\frac{p}{m}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

$x_0\in R\setminus Q$ 时，$g(x_0,y)=0$

$\int_0^1 g(x_0,y)dy$ 存在，由于其间断点集为 $y=\frac{p}{m}$ （m固定），

$y\le 1$，知间断点集为零面积集

在零面积集上改变函数值，故 $\int_0^1 g(x_0,y)dy=0$

日期:　　　/

故 $\int_0^1 dx \int_0^1 g(x,y)\,dy = \int_0^1 0\,dx = 0$

同理 $\int_0^1 dy \int_0^1 g(x,y)\,dx = 0$

例. (Minkowski不等式)

f在$[a,b]\times[c,d]$上非负,连续, $p\geq 1$

则 $\left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$

$p>1$时 iff $f(x,y)=u(x)v(y)$

$p=1$时 自然取等

pr. 令 $g(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$　　g在$[a,b]$上连续(可导必然连续)

$$\int_a^b g^p(x)\,dx = \int_a^b g^{p-1}(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b g^{p-1}(x)\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d g^{p-1}(x) f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b g^{p-1}(x) f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$\leq \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^{(p-1)q}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \quad \text{(Hölder)}$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f^p(x,y)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \cdot \left(\int_a^b g^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

同除 $\left(\int_a^b g^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$

有不等式成立.

由Hölder的取等条件, $\dfrac{f^p(x,y)}{g^{(p-1)q}(x)} = h(y) \Rightarrow f(x,y)=u(x)v(y)$

非积分形式即有 $a_k, b_k \geq 0\ (k=1,2\cdots n)$, $p\geq 1$

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

至此我们解决了定义在有界矩形区域上的积分.

日期: /

§10.4 有界集合上的二重积分

§10.1～10.3中讨论了矩形区域上的积分，而本节将其推广至一般有界集合上的积分

先利用矩形区域上的积分定义一般有界集合上的积分

1、定义

step 1. 延拓

df. $f_B(p)=\begin{cases} f(p) & p\in B \\ 0 & p\in B^c \end{cases}$

f_B 在 R^2 上均有定义

step 2. 定义

任取有界的闭矩形 $I\supset B$. 若 f_B 在 I 上可积，称 f 在 B 上可积

称 $\int_I f_B\,d\sigma$ 为 f 在 B 上的二重积分，记作 $\iint_B f(x,y)\,dxdy$、$\int_B f\,d\sigma$

step 3. 验证定义的良性，即不依赖于 I 的选择

对 $I_1\supset B$, $I_2\supset B$, I_1、I_2 为闭矩形

作一个矩形 I，有 $I\subset I_1$, $I\subset I_2$，自然 $I\subset B$

由定义知 $\int_B f\,d\sigma=\int_I f_B\,d\sigma=\int_{I_1} f_B\,d\sigma=\int_{I_2} f_B\,d\sigma$

(事实上，$\int_I f_B\,d\sigma=\int_{I_1} f_B\,d\sigma$，由于 $x\in I\setminus I_1$ 时，$f(x)=0$

故 ∀ Riemann和估果为0)

2、判定

① Lebesgue 定理

f 在 B 上可积 $\Leftrightarrow$ $D(f_B)$ 为零测集

日期: /

下面给出一个更为实用的判定定理，仅为充要条件

② $B\subset\mathbb{R}^2$ 有界，$f:B\to\mathbb{R}$ 有界

若 ∂B 和 f 在 B 上间断点集均为零测集，则 f 在 B 上可积

为方便研究，通常选择闭矩形 I 满足 $I^\circ\supset\bar{B}$

该选择的优越性在于 f_B 在 $I\cap(\bar{B})^c$ 上连续

pr. B° 中，$f_B=f$，故 f_B 间断点为 f 在 B° 上间断点。

故 $D(f_B)\subset D(f)\cup\partial B$ 为零测集

即 f_B 在 I 上可积 $\Leftrightarrow$ f 在 B 上可积

3. 性质

① 线性性

设 $B\subset\mathbb{R}^2$ 有界，f 在 B 上可积，对 $\forall$ 常数 c，

对 cf 在 B 上可积，且 $\int_B cf\,d\sigma=c\int_B f\,d\sigma$

若 $g:B\to\mathbb{R}$，g 在 B 上可积，则 $f\pm g$ 在 B 上可积，且 $\int_B(f\pm g)\,d\sigma=\int_B f\,d\sigma\pm\int_B g\,d\sigma$

亦即 $\int_B(\alpha f+\beta g)\,d\sigma=\alpha\int_B f\,d\sigma+\beta\int_B g\,d\sigma$

pr. 取 $I^\circ\supset\bar{B}$

(1) f 在 B 上可积 $\Leftrightarrow$ f_B 在 I 上可积 $\Rightarrow$ cf_B 在 I 上可积

$\Leftrightarrow$ cf 在 B 上可积

而 $\int_I cf_B\,d\sigma=c\int_I f_B\,d\sigma$

$\Rightarrow\int_B cf\,d\sigma=\int_B f\,d\sigma$

(2) $\int_B(f\pm g)\,d\sigma=\int_I(f_B\pm g_B)\,d\sigma=\int_I f_B\,d\sigma\pm\int_I g_B\,d\sigma=\int_B f\,d\sigma\pm\int_B g\,d\sigma$

② 集合可加性

日期:　　/

设 $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$ 有界，且 $B_1 \cap B_2$ 零面积，若 f 在 B_1 和 B_2 上可积，则 f 在 $B_1 \cup B_2$ 可积，

且 $\int_{B_1 \cup B_2} f\, d\sigma = \int_{B_1} f\, d\sigma + \int_{B_2} f\, d\sigma$

pr. $I \supset \overline{B_1 \cup B_2}$

$\int_{B_1} f\, d\sigma = \int_I f_{B_1}\, d\sigma \quad \int_{B_2} f\, d\sigma = \int_I f_{B_2}\, d\sigma$

$$f_{B_1 \cup B_2} = \begin{cases} f(p) & p \in B_1 \cup B_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

而 $f_{B_1} = \begin{cases} f(p) & p \in B_1 \\ 0 & p \notin B_1 \end{cases}$ $\quad f_{B_2} = \begin{cases} f(p) & p \in B_2 \\ 0 & p \notin B_2 \end{cases}$

故 $f_{B_1} + f_{B_2} = \begin{cases} f(p) & p \in B_1 \cup B_2 \setminus (B_1 \cap B_2) \\ 2f(p) & p \in B_1 \cap B_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

即 $f_{B_1 \cup B_2}$ 与 $f_{B_1} + f_{B_2}$ 仅在 $B_1 \cap B_2$ 处取值不同，而 $B_1 \cap B_2$ 零面积

$\int_{B_1} f\, d\sigma + \int_{B_2} f\, d\sigma = \int_I f_{B_1}\, d\sigma + \int_I f_{B_2}\, d\sigma = \int_I f_{B_1} + f_{B_2}\, d\sigma$

$= \int_I f_{B_1 \cup B_2}\, d\sigma = \int_{B_1 \cup B_2} f\, d\sigma$

自然地当 B_1、B_2 为矩形时成立

回忆 Riemann 积分最初的定义，为 $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} f(\xi_i)\sigma(I_i) = A$

对矩形而言 $\sigma(I)$ 为可求的，但对于一般有界集合呢？

如下给出了面积的定义，以便在一般的有界集合中，利用分割的方法定义积分

4. 面积

设 $B \subset \mathbb{R}^2$ 为有界点集，若 1 在 B 上可积，称 $\int_B 1\, d\sigma$ 为点集 B 的面积，记作 $\sigma(B)$

此时称 B 是有面积的

利用已给出的多重积分的定义，有如下结果：

日期:　　　/

对B，称函数 $\chi_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$ 为集合B的特征函数

则 $\sigma(B)=\int_B 1\,d\sigma=\int_I \chi_B\,d\sigma$ ($I\supset B$，I为矩形)

在该定义下零面积集有良好的性质

5. 零面积集 $\Leftrightarrow$ 面积为0

设 $B\subset R^2$ 为有界集，则点集B为零面积集的充分必要条件为

$\sigma(B)=\int_B 1\,d\sigma=0$

pr. $\Rightarrow$ 作 $I^\circ\supset B$，$\{x\in I,\ \chi_B(x)\neq 0\}=B$ 为零面积集

故 χ_B 在 I 上可积，$\sigma(B)=\int_I \chi_B\,d\sigma=0$

$\Leftarrow$ 设 $\sigma(B)=\int_B 1\,d\sigma=0$

则1在B上可积，即对 $I\supset B$，有 $\int_I \chi_B\,d\sigma=0$

对 I 的任意分割 $\mathcal{Z}=\{I_1,\cdots,I_k\}$

$\overline{S}(\chi_B,\mathcal{Z})=\sum\limits_{B\cap I_i\neq\phi}\sigma(I_i)$

$\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to 0}\overline{S}(\chi_B,\mathcal{Z})=0$

故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $\|\mathcal{Z}\|<\delta$ 时，有 $\sum\limits_{B\cap I_i\neq\phi}\sigma(I_i)<\varepsilon$

B被 $\underset{B\cap I_i\neq\phi}{\sigma(I_i)}$ 所覆盖

由零面积定义知B为零面积集

6. 特征函数的性质：$D(\chi_B)=\partial B$

pr. 一方面 $D(\chi_B)\subset\partial B$

$B^\circ\cup\partial B\cup(B^c)^\circ=R^2$

χ_B 在 B°，$(B^c)^\circ$ 上连续（由于在 B° 上 $\chi_B\equiv 1$，在 $(B^c)^\circ$ 上 $\chi_B\equiv 0$）

日期:　　　/

故 $D(\chi_B) \subset \partial B$

另一方面 $D(\chi_B) \supset \partial B$

$\forall p \in \partial B$，在 p 的任何1个小邻域中有 B° 与 $(B^c)^\circ$ 中的点

即 $\exists p', p''$，s.t. $\chi_B(p') = 1$，$\chi_B(p'') = 0$，故 χ_B 在 p 处不连续，$\partial B \subset D(\chi_B)$

故 $D(\chi_B) = \partial B$

7. 有面积集的判定

设有界集 $B \subset \mathbb{R}^2$，则 B 有面积 $\Leftrightarrow$ ∂B 为零面积集

pr.　B有面积，取 $I^\circ \supset \bar{B}$，χ_B 在 I 上可积

$\Leftrightarrow$ $D(\chi_B)$ 为零测集

而 $D(\chi_B) = \partial B$

∂B 为闭集，且 B 有界，故 ∂B 有界闭

故 $D(\chi_B)$ 零测 $\Leftrightarrow$ ∂B 零面积

由7可知，若 B 为有限个连续曲线段围成的集合，或为逐段光滑曲线围成的集合

则 B 有面积.

例、$[0,1]^2$ 中有理点的全体没有面积

pr.　$B = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, (x,y) \in [0,1]^2\}$

$\partial B = [0,1] \times [0,1]$　$\sigma(\partial B) = 1 \neq 0$

故无面积

上述结果利用 χ_B 在 B 上的二重积分定义了面积，事实上，利用更直观地几何分割办法，通过对分割的不断细分，对和数取极限也可定义面积.

8. 面积的等价定义

日期:　　/

设$B\subset\mathbb{R}^2$为一有界集，B有面积

$\Leftrightarrow$ 对$I^\circ\supset B$的I的$\forall$矩形分割网$\mathcal{Z}$

有 $\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to0}\sum\limits_{I_j\cap B\neq\phi}\sigma(I_j)=\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to0}\sum\limits_{I_j\subset B}\sigma(I_j)$

pr. B有面积

$\Leftrightarrow \int_B 1\,d\sigma=\int_I \chi_B\,d\sigma$ 存在

$\Leftrightarrow \underline{\int}_I \chi_B\,d\sigma=\overline{\int}_I \chi_B\,d\sigma$

而 $\underline{\int}_I \chi_B\,d\sigma=\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to0}\underline{S}(\chi_B,\mathcal{Z})=\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to0}\sum\limits_{I_j\subset B}\sigma(I_j)$

$\overline{\int}_I \chi_B\,d\sigma=\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to0}\overline{S}(\chi_B,\mathcal{Z})=\lim\limits_{\|\mathcal{Z}\|\to0}\sum\limits_{I_j\cap B\neq\phi}\sigma(I_j)$

即证

在定义了面积之后，对有面积的有界集合，利用分割的办法定义 Riemann 积分，并验证两种积分的等价性，有：

9、有面积点集 Riemann 可积的分割定义

设$B\subset\mathbb{R}^2$为B中有面积的点集，f在B上可积.

对$\forall$分割T作 Riemann 和，$\forall\xi_i\in D_i\ (i=1,2,\cdots,m)$

有 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{i=1}^m f(\xi_i)\sigma(D_i)=\int_B f\,d\sigma$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要分割$T=\{D_1,\cdots,D_m\}$满足$\|T\|<\delta$时，

有 $\left|\sum\limits_{i=1}^m f(\xi_i)\sigma(D_i)-\int_B f\,d\sigma\right|<\varepsilon$

其中 $\|T\|=\sup\limits_{1\le i\le m}\operatorname{diam}D_i$

pr.

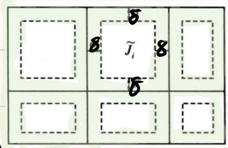
日期:　　　/

f在B上可积，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 矩形网分割 $T_\varepsilon=\{J_1,\cdots,J_t\}$

st. $\overline{S}(f_B,T_\varepsilon)-\underline{S}(f_B,T_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}$

即 $\sum\limits_{J_i\cap B\neq\phi}(\sup f_B(J_i)-\inf f_B(J_i))\sigma(J_i)<\frac{\varepsilon}{2}$

将矩形 J_i 每一边平行地向矩形内部收缩同一距离 $\delta>0$，如下图.



作为开矩形 $\tilde{J}_i\subset J_i$ $(i=1,2,\cdots,t)$

令 $K=I\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{t}\tilde{J}_i)^c$ 为闭集 (闭集的交)

取 $\delta>0$ 且充分小，st. $\sigma(K)<\frac{\varepsilon}{2\omega}$ (ω 为f在B上振幅)

任取分割 $T=\{D_1,\cdots,D_m\}$，st. $\|T\|<\delta$,

$B=\bigcup\limits_{i=1}^{m}D_i$. $A\triangleq\int_B fd\sigma=\sum\limits_{i=1}^{m}\int_{D_i}fd\sigma$

设f在 D_i 上上、下确界为 M_i,m_i，那么

$m_i\sigma(D_i)\le\int_{D_i}fd\sigma\le M\sigma(D_i)$

(由于在 D_i 上，$m_i\chi_{D_i}\le f\le M_i\chi_{D_i}$

$\int_{I\supset D_i}m_i\chi_{D_i}d\sigma\le\int_{I\supset D_i}fd\sigma\le\int_{I\supset D_i}M_i\chi_{D_i}d\sigma$ (尚未证明保序性)

即有 $m_i\sigma(D_i)\le\int_{D_i}fd\sigma\le M\sigma(D_i)$)

记 $\mu_i=\frac{1}{\sigma(D_i)}\int_{D_i}fd\sigma$，则 $m_i\le\mu_i\le M_i$

且 $\int_{D_i}fd\sigma=\mu_i\sigma(D_i)$

$A=\sum\limits_{i=1}^{m}\int_{D_i}fd\sigma=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\sigma(D_i)$

故 $\left|\sum\limits_{i=1}^{m}f(\xi_i)\sigma(D_i)-\int_B fd\sigma\right|=\left|\sum\limits_{i=1}^{m}(\mu_i-f(\xi_i))\sigma(D_i)\right|$

$\le\sum\limits_{i=1}^{m}|\mu_i-f(\xi_i)|\sigma(D_i)\le\sum\limits_{i=1}^{m}(M_i-m_i)\sigma(D_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(D_i)\triangleq\Sigma_1+\Sigma_2$

$\Sigma_1\triangleq\sum\limits_{D_i\subset K}\omega_i\sigma(D_i)$ $\Sigma_2\triangleq\sum\limits_{D_i\subset K}\omega_i\sigma(D_i)$

日期：　　/

$$\Sigma_1 \leq w \sum_{D_i \subset K} \sigma(D_i) < w\sigma(K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

对 Σ_2，$D_i \not\subset K$，故 D_i 必与某个 J_j 相交，必有 $D_i \subset J_j$

故 $\Sigma_2 = \sum_{j=1}^{t} \sum_{D_i \subset J_j} w_i \sigma(D_i)$

$$\leq \sum_{J_j \cap B \neq \phi} (\sup f(J_j) - \inf f(J_j)) \sum_{D_i \subset J_j} \sigma(D_i)$$

$$\leq \sum_{J_j \cap B \neq \phi} (\sup f(J_j) - \inf f(J_j)) \sigma(J_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

即证明了 $\exists \delta$，st. $\|T\| < \delta$ 时，有 $\left| \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\sigma(D_i) - \int_B f d\sigma \right| < \varepsilon$

在给出了分割定义后，自然也可以给出由此得到的性质：

此时可加性变为明显，同时有保序性成立。

下述为§6.2中积分均值定理的推广

10. 积分平均值定理

设 K 为 R^2 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域，函数 $f, g: K \to R$ 连续

且 g 在 K 上不变号　　(连通性)

则 $\exists \xi \in K$，st. $\int_K fg\, d\sigma = f(\xi) \int_K g\, d\sigma$

pr.　g 与 fg 在 K 上可积

K 紧 $\Rightarrow$ 设 f 在 K 上取得最小值 $f(a)$，也取得最大值 $f(b)$

设在 K 上 $g \geq 0$，则 $f(a)g(p) \leq f(p)g(p) \leq f(b)g(p)$

积分后即 $f(a)\int_K g\, d\sigma \leq \int_K fg\, d\sigma \leq f(b)\int_K g\, d\sigma$

$\int_K g\, d\sigma \geq 0$

若 $\int_K g\, d\sigma = 0$，则 $g = 0$ 对 $\forall p \in K$ 成立，自然成立

若 $\int_K g\, d\sigma > 0$，$f(a) \leq \dfrac{\int_K fg\, d\sigma}{\int_K g\, d\sigma} \leq f(b)$

日期: /

$f(a)$、$f(b)$ 为 f 在 K 中最小值

由 K 连通性，且 f 连续（连续函数介值性由区域连通性决定）

$\exists \xi$. s.t. $\int_K fg\,d\sigma = f(\xi)\int_K g\,d\sigma$

事实上，g 仅可积亦可得到相同结果

$g=1$ 时即有

若 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域，若 f 在 K 上连续

$\exists$ 一点 $\xi \in K$, s.t. $\int_K f\,d\sigma = f(\xi)\sigma(K)$